

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2012

Baden-Württemberg

Aufgabe 6 Stochastik

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

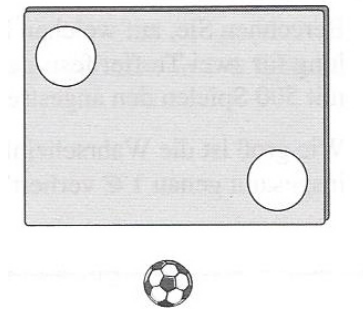
Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2015

Ein Fußballverein veranstaltet bei seinem Vereinsfest ein Torwandschießen.
Ein Spiel besteht dabei darin, dass ein Schütze erst drei Schüsse auf das untere Loch, dann drei Schüsse auf das obere Loch der Torwand abgibt.
Ein Treffer wird notiert, wenn der Ball durch das angepeilte Loch hindurch geht.
Das Ziel eines Spieles ist, möglichst viele Treffer zu erzielen.



6.1

Der Verein verfügt über Aufzeichnungen früherer Jahre über die Häufigkeit der bei den Spielen insgesamt erzielten Treffer.

Jahr	2007	2008	2009	2010
Anzahl Spiele gesamt	92	77	74	97
Anzahl Treffer gesamt	84	66	64	84

Berechnen Sie aus der Gesamtheit dieser Daten die relative Häufigkeit, mit einem Schuss einen Treffer zu erzielen.

(4 Punkte)

6.2

Es wird eine statistische Trefferwahrscheinlichkeit von 0,15 pro Schuss angenommen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Kein Treffer in einem Spiel

B: Mit den ersten vier Schüssen genau drei Treffer

C: Mindestens ein Treffer im oberen Loch

Formulieren Sie das Gegenereignis von A in Worten.

(8 Punkte)

Um kürzere und damit mehr Spiele anzubieten, überlegt sich die Jugendabteilung ein Torwandschießen mit nur zwei Schüssen: erst ein Schuss auf das untere Loch, dann ein Schuss auf das obere. Dabei nimmt sie für dieses neue Spiel eine Trefferwahrscheinlichkeit von 0,18 für das untere Loch und 0,12 für das obere Loch an.

6.3

Zeichnen Sie für das neue Spiel ein geeignetes Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Spielausgänge.

(4 Punkte)

6.4

Der Einsatz für das neue Spiel soll 1 € betragen. Für einen Treffer erhält ein Spieler 2 €, für zwei Treffer 10 €, ohne Treffer ist der Einsatz verloren.

Wie viele Spiele müssen gespielt werden, damit der Fußballverein einen Gewinn von 200 € erwarten kann ?

Berechnen Sie, auf welchen Betrag die Jugendmannschaft die Auszahlung für zwei Treffer festsetzen müsste, damit sie statistisch gesehen mit 500 Spielen den angestrebten Gewinn von 200 € erzielt.

(9 Punkte)

6.5

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler in drei Spielen insgesamt genau 1 € verliert ?

(5 Punkte)

30 Punkte

Lösung**6.1**

In den Jahre 2007 – 2010 wurden insgesamt 340 Spiele durchgeführt.
Hierbei wurden $340 \cdot 6 = 2040$ Schüsse abgegeben.

Insgesamt wurden $84 + 66 + 64 + 84 = 298$ Treffer erzielt.

Die relative Häufigkeit für einen Treffer beträgt $\frac{298}{2040} \approx 0,146 = 14,6\%$

6.2

Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer beträgt nun 0,15.
Die Wahrscheinlichkeit, daneben zu schießen beträgt folglich $1 - 0,15 = 0,85$.

$P(A) = 0,85^6 \approx 0,377 = 37,7\%$ (es wird 6 mal daneben geschossen)

$P(B) = 0,15^3 \cdot 0,85 \cdot 4 \approx 0,0115 = 1,15\%$

Kommentar: Es wird dreimal getroffen und einmal daneben geschossen. Der Faktor 4 ist deshalb erforderlich, weil in der Aufgabe nicht vorgegeben ist, an welcher Stelle getroffen bzw. nicht getroffen werden soll. Der eine Fehlschuss kann beim 1., 2., 3. oder 4. Schuss erfolgen, also gibt es vier verschiedene Sortierungsmöglichkeiten für die Treffer und den Fehlschuss.

$P(C) = 1 - P(\text{kein Treffer im oberen Loch}) = 1 - 0,85^3 \approx 0,386 = 38,6\%$

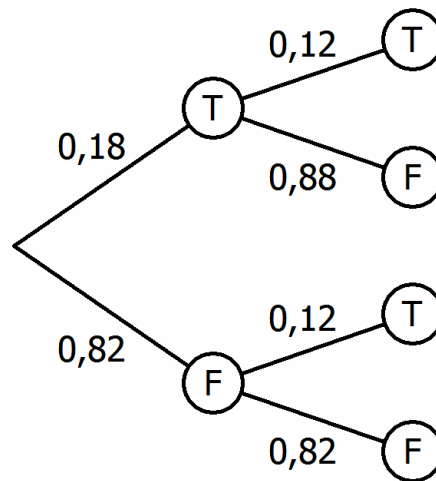
Kommentar: Es ist einfacher, auf das Gegenereignis zu wechseln und die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, keinen Treffer im oberen Loch zu erzielen. Da auf das obere Loch nur 3 Treffer abgegeben werden, beträgt die Wahrscheinlichkeit $0,85^3$, keinen Treffer zu erzielen.

Das Gegenereignis zu A: "Kein Treffer in einem Spiel" lautet

$\bar{A}$: "Mindestens ein Treffer in einem Spiel"

6.3

Baumdiagramm: T = Treffer F = Fehlschuss



Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Spielausgänge:

$$P(TT) = 0,18 \cdot 0,12 = 0,0216$$

$$P(TF) = 0,18 \cdot 0,88 = 0,1584$$

$$P(FT) = 0,82 \cdot 0,12 = 0,0984$$

$$P(FF) = 0,82 \cdot 0,88 = 0,7216$$

6.4

Mögliche Gewinne aus Sicht des Vereins:

Gewinn +1 € (bei 2 Fehlschüssen) mit Wahrscheinlichkeit 0,7216

Verlust -1 € (bei 1 Treffer) mit Wahrscheinlichkeit $0,1584 + 0,0984 = 0,2568$

Verlust - 9 € (bei 2 Treffern) mit Wahrscheinlichkeit 0,0216

Erwarteter Gewinn des Vereins pro Spiel:

$$1 \cdot 0,7216 - 1 \cdot 0,2568 - 9 \cdot 0,0216 = 0,2704 \approx 27 \text{ Cent}$$

Ein Gewinn von 200 Euro kann der Verein nach $\frac{200\text{€}}{0,27\text{€}} \approx 741$ Spielen erwarten.

Damit der Gewinn statistisch bereits nach 500 Spielen erzielt wird, muss der erwartete

Gewinn des Vereins pro Spiel $\frac{200\text{€}}{500} = 0,40\text{€}$ betragen.

Der Verlust bei 2 Treffern für den Verein sei nun x.

Der erwartete Gewinn beträgt $1 \cdot 0,7216 - 1 \cdot 0,2568 - x \cdot 0,0216 = 0,4648 - 0,0216x$

Nun soll gelten: $0,4648 - 0,0216x = 0,40 \Rightarrow x = -3$

Der Verlust des Vereins bei 2 Treffern muss 3 Euro betragen.

Aufgrund des Einsatzes von 1 € müsste der Auszahlungsbetrag bei 2 Treffern von ursprünglich 10 € auf 4 € reduziert werden.

6.5

In 3 Spielen zahlt der Spieler einen Einsatz von 3€.

Damit er insgesamt 1€ verliert, muss er in einem Spiel 2€ ausgezahlt bekommen.

Das heißt in einem der 3 Spiele muss er einen Treffer erzielen, in den anderen beiden Spielen darf er keinen Treffer erzielen.

Es gilt: $P(\text{kein Treffer}) = 0,7216$ und $P(\text{genau ein Treffer}) = 0,2568$

$P(\text{bei drei Spielen zweimal keinen Treffer und einmal einen Treffer})$

$$= 0,7216^2 \cdot 0,2568 \cdot 3 \approx 0,401$$

Der Faktor 3 entsteht dadurch, dass es drei Möglichkeiten gibt, die Spiele mit und ohne Treffer umzusortieren.