

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2012

Baden-Württemberg

Aufgabe 5 Wirtschaftliche Anwendungen

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Januar 2015

Eine Spielzeugfabrik stellt aus drei verschiedenen Kunststoffgranulaten (K_1, K_2, K_3) drei Bauteile (B_1, B_2, B_3) her.

Diese werden in drei verschiedene Spielsets (S_1, S_2, S_3) verpackt.

Den Materialbedarf in Mengeneinheiten (ME) zeigen folgende Tabellen:

	B_1	B_2	B_3
K_1	2	0	2
K_2	1	2	2
K_3	1	2	0

	S_1	S_2	S_3
K_1	2	10	6
K_2	3	9	10
K_3	3	1	4

5.1

Erstellen Sie eine Tabelle, die den Bauteilebedarf für die Spielsets zeigt. (2 Punkte)

5.2

Ein Auftrag über 10 ME S_1 , 12 ME S_2 und 17 ME S_3 soll möglichst schnell ausgeführt werden können.

Wie viele ME an Kunststoffgranulaten muss der Betrieb dazu vorrätig haben ? (3 Punkte)

5.3

Ein Kunde bestellt 20 ME S_1 , 30 ME S_2 und 100 ME S_3 . Die variablen Herstellkosten je Spielset betragen 10 GE für S_1 , 8 GE für S_2 und 12,50 GE für S_3 . Die Fixkosten betragen 200 GE.

Für welchen Preis je Spielset wird Kostendeckung erzielt, wenn der Preis für die Spielsets jeweils gleich sein soll ? (5 Punkte)

5.4

In einer anderen Produktionsperiode werden 105 ME von S_1 produziert.

Die Produktion von S_3 ist halb so groß wie die von S_2 . Es werden von K_3 525 ME benötigt.

Berechnen Sie die Produktion von S_2 und S_3 .

Wie viele ME werden von K_1 und K_2 benötigt ? (7 Punkte)

Die Spielzeugfabrik U ist mit zwei Unternehmen V und W und dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten. Diese haben im vergangenen Produktionszeitraum folgende Mengeneinheiten (ME) für die anderen Unternehmen und den Markt produziert:

	U	V	W	Markt
U	x_{11}	10	10	180
V	90	40	10	y_2
W	20	x_{32}	5	10

5.5

Berechnen Sie die fehlenden Werte für x_{11} , x_{32} und y_2 sowie die Technologiematrix A, wenn U 220 ME, V 150 ME und W 70 ME produzieren.

In einer anderen Produktionsperiode produziert U 2310 ME, V 3465 ME und W 4851 ME. Wie viele ME kann die Spielzeugfabrik an den Markt abgeben ? (7 Punkte)

5.6

Aufgrund einer technologischen Neuentwicklung wird die Lieferung des Unternehmens V an die Spielzeugfabrik U überflüssig. Die Liefermenge gibt das Unternehmen V an den Markt ab. Geben Sie die neue Technologiematrix an.

Die drei Unternehmen ändern nun ihre Produktionsmengen:

U produziert 200 ME und W 770 ME.

Wie viele ME muss das Unternehmen V mindestens produzieren, damit es auch an den Markt liefern kann ? (6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2012 Aufgabe 5

5.1

Die Rohstoff-Zwischenproduktmatrix lautet $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Die Rohstoff-Endproduktmatrix lautet $C = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 6 \\ 3 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Der Bauteilebedarf für die Spielesets ist die Zwischenprodukt-Endproduktmatrix B.

$$A \cdot B = C \Rightarrow B = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

	S_1	S_2	S_3
B_1	1	1	0
B_2	1	0	2
B_3	0	4	3

5.2

Der Produktionsvektor lautet $\vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix}$, gesucht ist der Rohstoffvektor $\vec{r}$.

$$\text{Es gilt } C \cdot \vec{p} = \vec{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 10 & 6 \\ 3 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 242 \\ 308 \\ 110 \end{pmatrix}$$

Von K_1 müssen 242 ME, von K_2 müssen 308 ME und von K_3 müssen 110 ME vorrätig sein.

5.3

Die gesamten Herstellkosten betragen

$$K = \overrightarrow{k_v}^T \cdot \vec{p} + K_f = (20 \quad 30 \quad 100) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 12,50 \end{pmatrix} + 200 = 1890 \text{ GE}$$

Da insgesamt 150 ME hergestellt werden, müsste ein Spielset $\frac{1890}{150} = 12,60$ GE kosten, um Kostendeckung zu erzielen.

5.4

Für den Produktionsvektor gilt $\vec{p} = \begin{pmatrix} 105 \\ 2x \\ x \end{pmatrix}$, da die Produktion von S_2 doppelt so groß ist wie die von S_3 .

Für den Rohstoffvektor gilt $\vec{r} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 525 \end{pmatrix}$

$$\text{Es gilt } C \cdot \vec{p} = \vec{r} : \begin{pmatrix} 2 & 10 & 6 \\ 3 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 105 \\ 2x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 525 \end{pmatrix}$$

Um x , y und z zu berechnen, muss diese Gleichung zunächst „ausmultipliziert“ werden:

$$\begin{array}{rrcr} 210 & +20x & +6x & = y \\ 315 & +18x & +10x & = z \\ 315 & +2x & +4x & = 525 \end{array}$$

Umsortieren des Gleichungssystems (Variablen nach links, Zahlen nach rechts)

$$\begin{array}{rrcr} 26x & -y & & = -210 \\ 28x & & -z & = -315 \\ 6x & & & = 210 \end{array}$$

Aus der 3. Zeile folgt $x = 35$.

Eingesetzt in die 1. Zeile ergibt $y = 1120$. Eingesetzt in die 2. Zeile ergibt $z = 1295$.

Von S_2 werden $2 \cdot 35 = 70$ ME produziert und von S_3 werden 35 ME produziert.

Von K_1 werden 1120 ME und von K_2 werden 1295 ME benötigt.

5.5

Es gilt $x_{11} = 220 - 180 - 10 - 10 = 20$ und $x_{32} = 70 - 20 - 5 - 10 = 35$
und $y_2 = 150 - 90 - 40 - 10 = 10$.

$$\text{Die Technologiematrix lautet } A = \begin{pmatrix} \frac{20}{220} & \frac{10}{150} & \frac{10}{70} \\ \frac{90}{220} & \frac{40}{150} & \frac{10}{70} \\ \frac{20}{220} & \frac{35}{150} & \frac{5}{70} \end{pmatrix}.$$

Für den Produktionsvektor gilt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2310 \\ 3465 \\ 4851 \end{pmatrix}$.

Der Marktabgabevektor ergibt sich aus der Leontief-Gleichung: $\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1176 \\ 903 \\ 3486 \end{pmatrix}$.

Die Spielzeugfabrik (Unternehmen U) kann 1176 ME an den Markt abgeben.

5.6

Aufgrund der Neuentwicklung sieht die Tabellenübersicht nun so aus:

	U	V	W	Markt	Produktion
U	20	10	10	180	220
V	0	40	10	100	150
W	20	35	5	10	70

Die neue Technologiematrix lautet $A = \begin{pmatrix} \frac{20}{220} & \frac{10}{150} & \frac{10}{70} \\ 0 & \frac{40}{150} & \frac{10}{70} \\ \frac{20}{220} & \frac{35}{150} & \frac{5}{70} \end{pmatrix}$

Es ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ x_2 \\ 770 \end{pmatrix}$.

Mit der Leontief-Gleichung ergibt sich der Marktabgabevektor:

$$\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{10}{11} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{7} \\ 0 & \frac{11}{15} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{11} & -\frac{7}{30} & \frac{13}{14} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ x_2 \\ 770 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \frac{11}{15}x_2 - 110 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Damit V mindestens 1 ME an den Markt liefern kann, muss $\frac{11}{15}x_2 - 110 \geq 1$ sein.

Daraus folgt $x_2 \geq 151,3$.

Es müssen von V mindestens 152 ME produziert werden, damit mindestens 1 ME an den Markt geliefert werden kann.

Hinweis: Würde man $\frac{11}{15}x_2 - 110 > 0$ als Bedingung ansetzen, ergäbe sich $x_2 > 150$ das heißt V muss mehr als 150 ME produzieren.