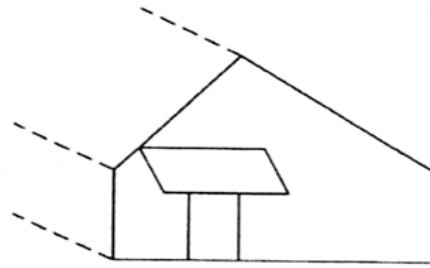


Hauptprüfung 2012 Aufgabe 4

Die Giebelwand eines Hauses hat die Eckpunkte
 $A(9/1/3)$, $B(9/1/0)$, $C(-1/1/0)$, $D(-1/1/3)$ und
 $S(5/1/7)$.
 Ein rechteckiges, schräges Vordach ist an
 den Eckpunkten
 $E(4/1/4)$ und $F(8/1/4)$ an der Wand
 befestigt.



4.1

Welche besondere Lage weisen alle oben genannten Punkte auf ? (2 Punkte)

4.2

Zeichnen Sie die Giebelwand ABCDS und die Vordachpunkte E und F in ein räumliches Koordinatensystem ein

(x_2 - und x_3 -Achse $1LE = 1cm$, x_1 -Achse mit dem Schrägwinkel 45° und $1LE = \frac{1}{2}\sqrt{2} cm$).
 (5 Punkte)

4.3

Eine der schrägen Dachkanten liegt auf der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

Um welche Dachkante handelt es sich ? Begründen Sie rechnerisch. (4 Punkte)

4.4

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Giebelwand ABCDS. (5 Punkte)

4.5

Die frei vorragenden Eckpunkte des Vordachs sind $G(8/2,5/3,5)$ und H.
 Berechnen Sie die Koordinaten des Rechteckpunktes H.
 Ergänzen Sie das Vordach in Ihrer Zeichnung aus 4.2. (2 Punkte)

4.6

Der Punkt F_{12} ist die orthogonale Projektion des Punktes F auf die $x_1 - x_2$ -Ebene.
 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes F_{12} .
 Berechnen Sie den Winkel $\angle F_{12}FG$, den das Vordach mit der Hauswand einschließt.
 (4 Punkte)

4.7

Der Hauseigentümer plant das Vordach bis zur Dachkante DS zu verlängern.
 Geben Sie die Koordinaten des neuen Endpunktes E' an.
 Berechnen Sie die Länge $\overline{FE'}$ des neuen Vordachs. (8 Punkte)

Lösung Hauptprüfung 2012 Aufgabe 4

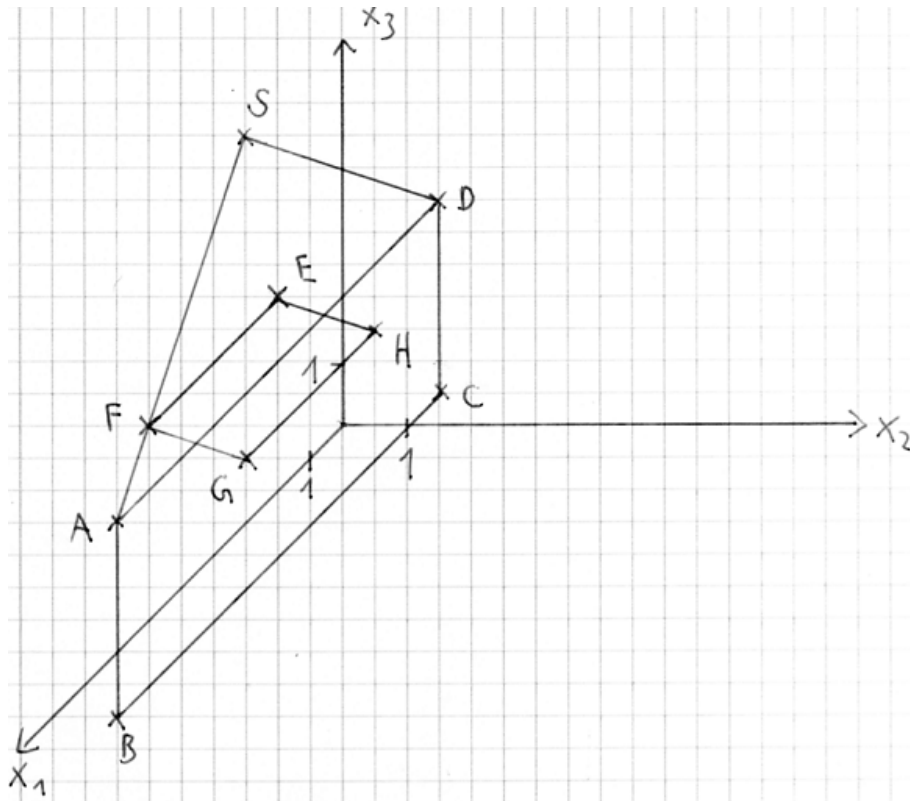
4.1

Bei allen Punkte ist die x_2 -Koordinate gleich 1.

Somit liegen alle Punkte in einer zur $x_1 - x_3$ – Ebene parallelen Ebene.

4.2

Zeichnung (inklusive der Vordachpunkte G und H gemäß Aufgabe 4.5)



4.3

Aufgrund des Richtungsvektors $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Geraden g kann man sich anschaulich herleiten,

dass es sich nur um die Dachkante SD handeln muss.

Rechnerische Begründung:

Prüfung ob S auf g liegt: Setzt man $r = 2,5$ in g ein, ergibt sich S.

Prüfung ob D auf g liegt: Setzt man $r = 0,5$ in g ein, ergibt sich D.

4.4

Die Giebelwand setzt sich aus einem Rechteck und einem Dreieck zusammen.

$$\text{Rechteckfläche} = \overline{BC} \cdot \overline{AB} = 10 \cdot 3 = 30 \text{ FE}$$

$$\text{Dreiecksfläche} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot h_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20 \text{ FE}$$

Die Giebelwand besitzt eine Fläche von $30 \text{ FE} + 20 \text{ FE} = 50 \text{ FE}$.

4.5

Für das rechteckige Vordach gilt $\overline{FG} = \overline{EH}$ mit $H(x / y / z)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 8-8 \\ 2,5-1 \\ 3,5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-4 \\ y-1 \\ z-4 \end{pmatrix} \quad \text{und daraus folgt } x = 4, y = 2,5 \text{ und } z = 3,5 \quad \text{also } H(4/2,5/3,5).$$

Zeichnung siehe oben

4.6

Der Projektionspunkt F_{12} besitzt die x_3 -Koordinate Null, also $F_{12}(8 / 1 / 0)$.

Der Winkel $F_{12}FG$ entspricht dem Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{FF_{12}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ und

$$\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Berechnung des Winkels: } \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{FF_{12}} \cdot \overrightarrow{FG}}{|\overrightarrow{FF_{12}}| \cdot |\overrightarrow{FG}|} = \frac{2}{4 \cdot \sqrt{1,5^2 + (-0,5)^2}}$$

Mit dem GTR folgt für den gesuchten Winkel $\alpha = 71,6^\circ$

4.7

Der Punkt E' ist anschaulich der Schnittpunkt der Gerade durch F und E und der Gerade der Dachkante DS aus Aufgabe 4.3

$$\text{Geradengleichung durch F und E: } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt von g und h:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Zeile: $8 + 4s = -2,5 + 3r$

3. Zeile: $4 = 2 + 2r$

Aus der 3. Zeile folgt $r = 1$.

Aus der 1. Zeile folgt dann $s = -1,875$.

Einsetzen von $r = 1$ in die Gerade g ergibt $E'(0,5/1/4)$.

$$\text{Länge von } \overline{FE'} = |\overline{FE'}| = \left| \begin{pmatrix} -7,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 7,5 \text{ LE.}$$