

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2012

Baden-Württemberg

Aufgabe 3 Analysis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

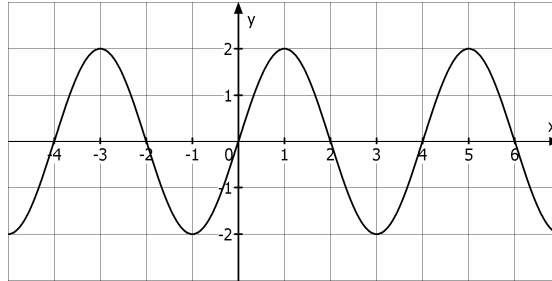
www.mathe-aufgaben.com

Dezember 2013

3.1

Gegeben ist das Schaubild K_g einer Funktion g mit $g(x) = a \cdot \sin(kx)$, $a, k, x \in \mathbb{R}$

Ermitteln Sie aus der Zeichnung die Amplitude, die Periode und berechnen Sie den Faktor k .



Das Schaubild K_g soll so verschoben werden, dass es symmetrisch zur y -Achse ist und dass die Tiefpunkte auf der x -Achse liegen.

Geben Sie für den verschobenen Graphen einen möglichen Funktionsterm an. (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$ für $-1 \leq x \leq 5$, $x \in \mathbb{R}$

3.2

Zeichnen Sie das Schaubild K_f von f und geben Sie die Nullstellen an.

Überprüfen Sie, ob die Punkte $W_1(0/1)$ und $W_2(2/1)$ Wendepunkte von K_f sind. (6 Punkte)

3.3

Berechnen Sie die exakte Steigung von K_f an der Stelle $x_1 = 0$ und geben Sie die Gleichung der Tangente an dieser Stelle an.

Zeigen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = -\pi \cdot x + 2\pi + 1$ Tangente an K_f an der Stelle $x_2 = 2$ ist.

Diese Tangenten schließen mit dem Schaubild K_f eine Fläche ein.

Berechnen Sie den exakten Inhalt dieser Fläche. (10 Punkte)

Gegeben ist die Parabel p mit der Gleichung $p(x) = 2x^2 - 12x + 17$, $x \in \mathbb{R}$

3.4

Zeigen Sie, dass der Scheitel der Parabel p ein Punkt des Schaubildes K_f ist.

Bestimmen Sie alle weiteren gemeinsamen Punkte von p und K_f . (3 Punkte)

3.5

Bestimmen Sie die Stelle $x \in [3;4]$, an welcher die Differenz der Funktionswerte der Funktionen f und p maximal ist. Berechnen Sie die maximale Differenz.

(5 Punkte)

30 Punkte

Lösung

3.1

Die Amplitude ist $a = 2$. Die Periode ist $p = 4$.

$$\text{Es gilt: } p = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Die Funktion lautet } g(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

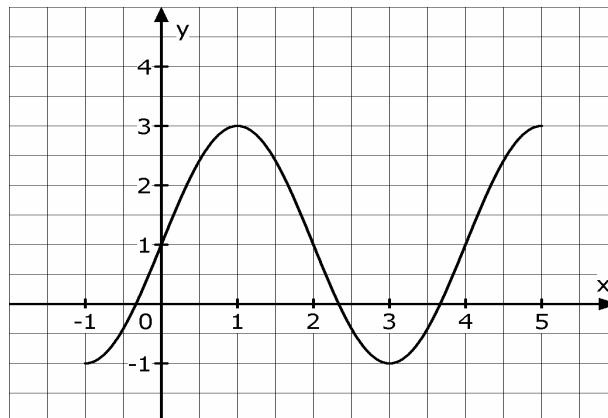
Damit das Schaubild zur y-Achse symmetrisch ist, muss es um 1 Einheit nach links verschoben werden.

Damit der Tiefpunkt auf der x-Achse liegt, muss das Schaubild um 2 Einheiten nach oben verschoben werden.

$$\text{Damit lautet die neue Funktion: } g^*(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right) + 2$$

3.2

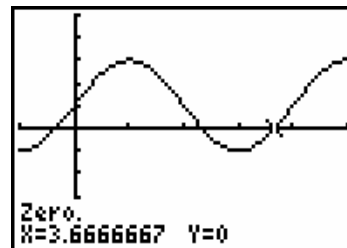
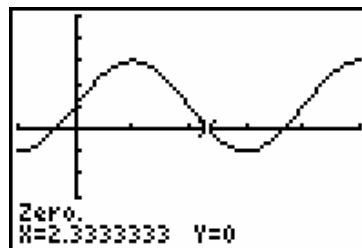
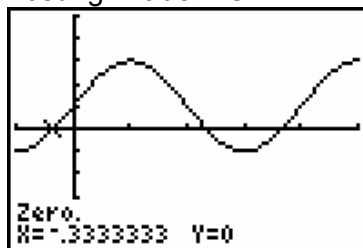
Zeichnung:



Nullstellen:

Der Ansatz hierfür lautet $f(x) = 0$

Lösung mit dem GTR



Nullstellen: $N_1(-0,33 / 0)$; $N_2(2,33 / 0)$; $N_3(3,67 / 0)$

Prüfung der Wendepunkte:

Ableitungen von f: $f'(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{\pi}{2}$ $f''(x) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$f'''(x) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Kontrolle für $W_1(0/1)$: $f''(0) = 0$ und $f'''(0) \neq 0$, somit existiert bei $x = 0$ ein Wendepunkt
 $f(0) = 1$ also Wendepunkt $W_1(0/1)$

Kontrolle für $W_2(2/1)$: $f''(2) = 0$ und $f'''(2) \neq 0$, somit existiert bei $x = 2$ ein Wendepunkt
 $f(2) = 1$ also Wendepunkt $W_2(2/1)$

3.3

Steigung bei $x=0$: $f'(0) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

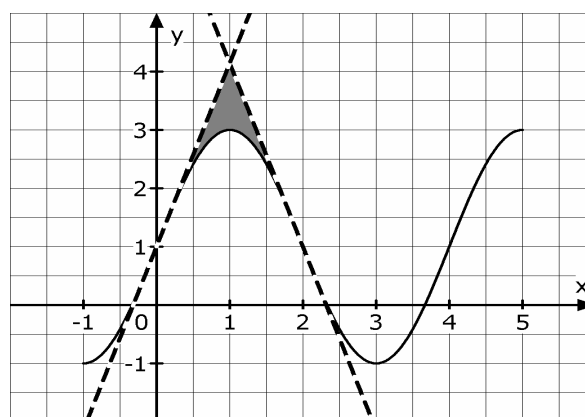
Tangente bei $x=0$: Allgemeine Tangentengleichung $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Einsetzen von $u = 0$: $y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$
 $y = \pi \cdot (x - 0) + 1 \Rightarrow y = \pi \cdot x + 1$

Tangente bei $x=2$: Einsetzen von $u = 2$ in die allgemeine Tangentengleichung:

$y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$ mit $f'(2) = -\pi$ und $f(2) = 1$
 $y = -\pi \cdot (x - 2) + 1 \Rightarrow y = -\pi \cdot x + 2 \cdot \pi + 1$ was zu zeigen war

Flächenberechnung:



Die gesuchte Fläche besteht aus zwei gleich großen spiegelsymmetrischen Teilflächen. Daher reicht es aus, den Inhalt der linken Teilfläche zu berechnen und das Ergebnis zu verdoppeln.

$$A = 2 \cdot \int_0^1 \left(\pi \cdot x + 1 - (2 \sin(\frac{\pi}{2} x) + 1) \right) dx = 2 \cdot \int_0^1 \left(\pi \cdot x - 2 \sin(\frac{\pi}{2} x) \right) dx$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{\pi}{2} x^2 + 2 \cos(\frac{\pi}{2} x) \cdot \frac{2}{\pi} \right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cos(\frac{\pi}{2}) \cdot \frac{2}{\pi} \right) - 2 \cdot \left(0 + \frac{4}{\pi} \right) = \pi - \frac{8}{\pi}$$

3.4

Es ist $p(x) = 2x^2 - 12x + 17$ mit $p'(x) = 4x - 12$ und $p''(x) = 4$

Berechnung des Tiefpunktes der Parabel (= Scheitelpunkt):

Notwendige und hinreichende Bedingung: $p'(x) = 0$ und $p''(x) > 0$

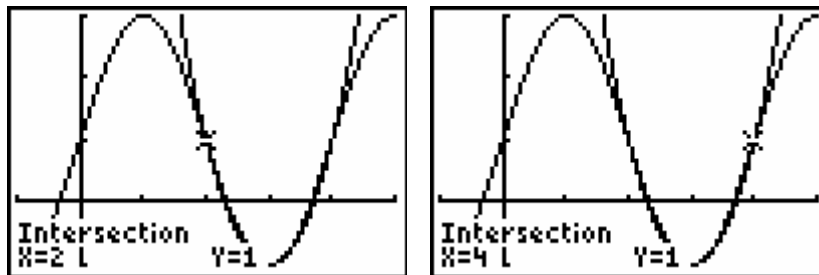
$$p'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$p''(3) = 4 > 0 \text{ also Tiefpunkt } T(3 / -1)$$

Prüfung, ob $T(3/-1)$ auf dem Schaubild von f liegt: $f(3) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3\right) + 1 = -2 + 1 = -1$

Damit ist gezeigt, dass der Scheitel der Parabel auf dem Schaubild von $f(x)$ liegt.

Gemeinsame Punkte der Parabel und $f(x)$:



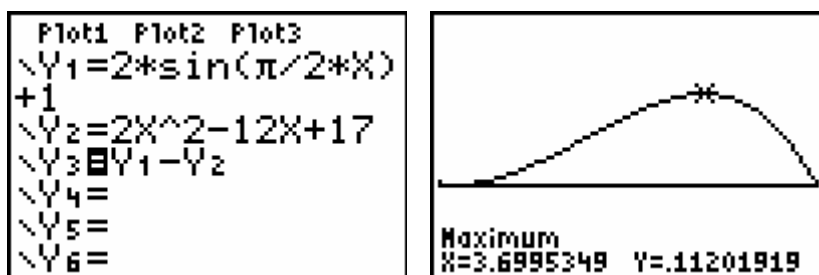
Neben dem gemeinsamen Punkt $T(3/-1)$ schneiden sich die beiden Schaubilder in $P(2/1)$ und $Q(4/1)$.

3.5

Gesucht ist das Maximum der Differenzfunktion $d(x) = f(x) - p(x)$

Notwendige und hinreichende Bedingung: $d'(x) = 0$ und $d''(x) < 0$

Lösung mit dem GTR:



Die Differenz wird maximal für $x = 3,7$ und die maximale Differenz beträgt $0,112$.