

Hauptprüfung 2012 Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 4 - e^{0,5x} - e^{-0,5x}$, $x \in \mathbb{R}$

Das Schaubild von f ist K_f .

2.1

Bestimmen Sie die Schnittpunkte von K_f mit der x -Achse und den Hochpunkt.

Zeichnen Sie K_f .

Weisen Sie nach, dass K_f symmetrisch zur y -Achse ist.

Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_f . (10 Punkte)

2.2

Das Schaubild K_f soll oberhalb der x -Achse durch das Schaubild einer ganzrationalen Funktion angenähert werden.

Geben Sie einen möglichen Funktionsterm an. (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 1$, $x \in \mathbb{R}$

Das Schaubild von g ist K_g .

2.3

Zeichnen Sie K_g in das Koordinatensystem von Aufgabenteil 2.1.

Beschreiben Sie, wie das Schaubild K_g aus dem Schaubild der Funktion g^* mit $g^*(x) = \cos(x)$ hervorgeht. (5 Punkte)

2.4

Berechnen Sie zwei exakte Stellen, an denen die Funktion g den Funktionswert 1,5 hat.

(2 Punkte)

2.5

Die Differenzfunktion d wird durch $d(x) = f(x) - g(x)$ definiert.

Begründen Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind:

a) Das Schaubild von d ist symmetrisch zur y -Achse.

b) $d(x) > 0$ für $-2 \leq x \leq 2$

c) $\int_2^3 d(x) dx > 0$

d) Der maximale Wert von d ist 0,05.

e) Das Schaubild von d hat unendlich viele gemeinsame Punkte mit K_f . (10 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2012 Aufgabe 2

2.1

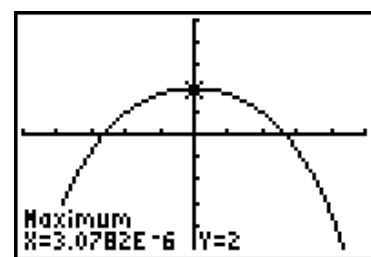
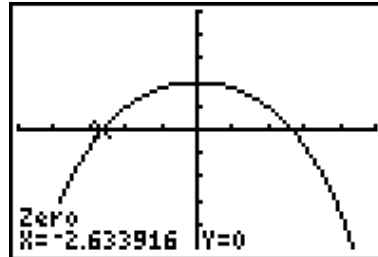
Schnittpunkte mit x-Achse und Hochpunkt:

Ansatz für Schnittpunkte mit x-Achse: $f(x) = 0$

Ansatz für Hochpunkt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$

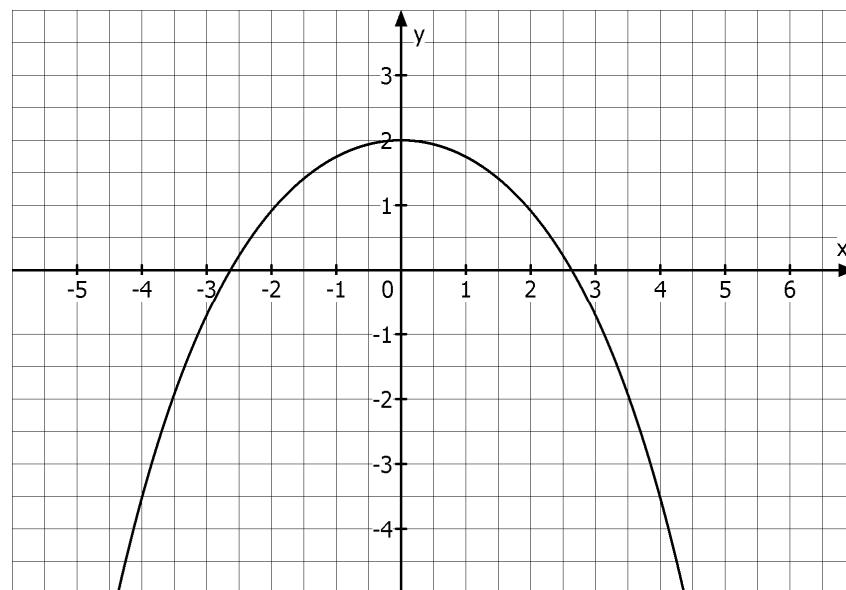
```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=4-e^(0.5X)-e
^(-0.5X)
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
  
```



GTR: Die Schnittpunkte mit der x-Achse lauten $N_1(-2,63 / 0)$ und $N_2(2,63 / 0)$.
Der Hochpunkt lautet $H(0/2)$.

Zeichnung:



Nachweis der Symmetrie:

Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse, wenn $f(-x) = f(x)$ gilt.

$f(-x) = 4 - e^{0,5(-x)} - e^{-(-0,5x)} = 4 - e^{-0,5x} - e^{0,5x} = f(x)$ was zu zeigen war

Krümmungsverhalten:

Es gilt $f'(x) = -0,5e^{0,5x} + 0,5e^{-0,5x}$ und $f''(x) = -0,25e^{0,5x} - 0,25e^{-0,5x}$

Da $f''(x) < 0$ für alle x -Werte gilt, ist das Schaubild von f rechtsgekrümmt, was man auch anschaulich der Zeichnung entnehmen kann.

2.2

Da der Schaubildausschnitt oberhalb der x-Achse näherungsweise parabelförmig verläuft, wird als Funktionsansatz eine quadratische Funktion verwendet:

$$h(x) = ax^2 + bx + c$$

Da die Parabel symmetrisch zur y-Achse ist, gilt $b = 0$ und für den Ansatz gilt $h(x) = ax^2 + c$

Bedingung 1: Der Punkt $H(0/2)$ liegt auf der Parabel: $h(0) = 2 \Rightarrow c = 2$

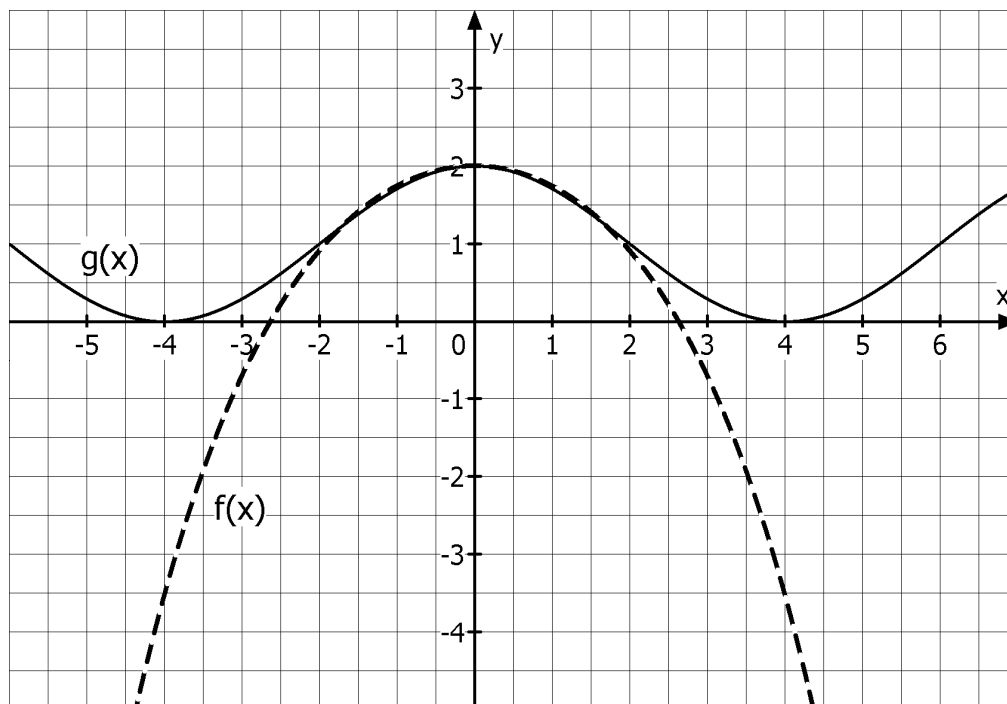
Bedingung 2: Der Punkt $N_1(-2,63 / 0)$ liegt auf der Parabel: $h(-2,63) = 0$

$$\Rightarrow a \cdot (-2,63)^2 + 2 = 0 \Rightarrow a \approx -0,29$$

Der Funktionsterm der Parabel lautet $h(x) = -0,29x^2 + 2$

2.3

Zeichnung:



Entstehung von g(x):

Ausgangsfunktion: $g^*(x) = \cos(x)$

1. Umwandlung: $g^{**}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ Streckung von $g^*(x)$ an der x-Achse mit dem

Faktor $\frac{4}{\pi}$ (Kehrwert verwenden !)

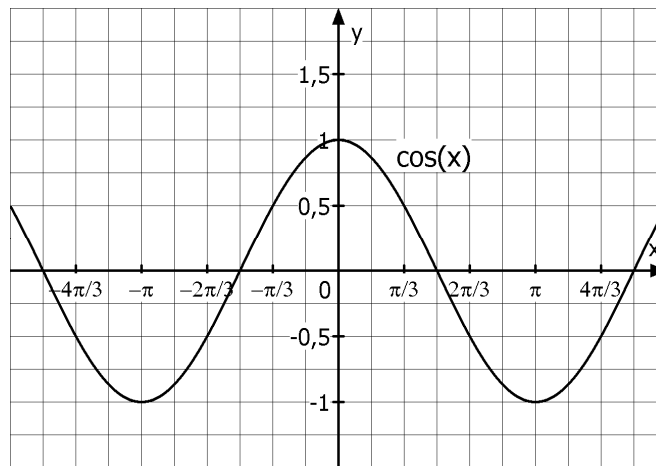
2. Umwandlung: $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 1$ Verschiebung von $g^{**}(x)$ um 1 nach oben

2.4

$$g(x) = 1,5 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 1 = 1,5 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 0,5$$

Aus der Formelsammlung folgt $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 0,5$

Anhand des Schaubildes der Kosinusfunktion ergibt sich aus Symmetriegründen, dass auch $\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = 0,5$ ist.

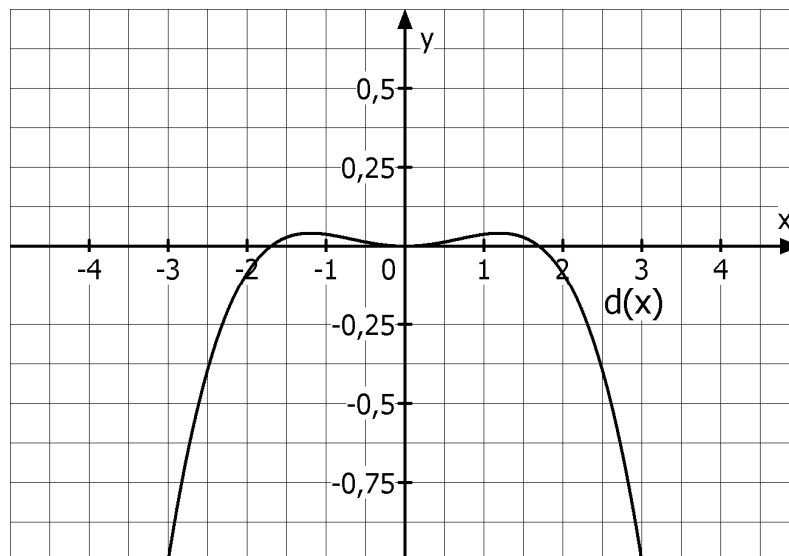


Daraus folgt: $\frac{\pi}{4}x = \frac{1}{3}\pi \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

$$\frac{\pi}{4}x = -\frac{1}{3}\pi \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

2.5

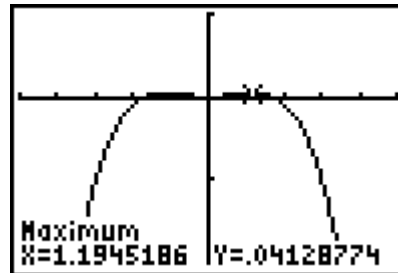
Um die Aussagen leichter zu bewerten, wird das Schaubild $d(x)$ skizziert.



a) Die Aussage ist gemäß Schaubild richtig.

Begründung: Da die Schaubilder $f(x)$ und $g(x)$ symmetrisch zur y-Achse sind, ist es auch die Differenz der beiden Funktionen.

- b) Es gilt $d(2) = -0,086 < 0$ und damit ist die Aussage falsch.
- c) Die Aussage ist falsch, da im Intervall von $x = 2$ bis $x = 3$ das Schaubild von $d(x)$ komplett unterhalb der x -Achse verläuft.
Die zugehörige Fläche liegt daher ebenfalls unterhalb der x -Achse und somit nimmt das Integral einen negativen Wert an.
- d) Gemäß GTR besitzt das Schaubild von d einen Hochpunkt bei $H(1,19/0,041)$.
Somit ist der maximale Wert $0,041$ und nicht $0,05$. Die Aussage ist falsch.



- e) Die Aussage ist richtig.
Begründung: Wenn die Schaubilder von $d(x)$ und $f(x)$ gemeinsame Punkte besitzen, gilt $d(x) = f(x)$. An diesen Stellen muss folglich $g(x) = 0$ sein.
Da $g(x) = 0$ an unendlich vielen Stellen gilt (das Schaubild von $g(x)$ schneidet unendlich oft die x -Achse), gilt an unendlich vielen Stellen $d(x) = f(x)$.