

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2012

Baden-Württemberg

Aufgabe 1 Analysis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

September 2014

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 5$ mit $x \in \mathbb{R}$.

1.1

Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von K_f an.

Berechnen Sie die exakten Koordinaten der Extrempunkte von K_f .

Zeichnen Sie K_f in ein geeignetes Koordinatensystem.

(7 Punkte)

1.2

Stellen Sie die Gleichungen der Wendetangenten an K_f auf.

K_f und seine Wendetangenten schließen eine Fläche ein.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

(6 Punkte)

1.3

Die Punkte $O(0/0)$, $A(u/0)$, $B(u/f(u))$ mit $0 \leq u \leq 1$ bilden ein Dreieck.

Berechnen Sie u so, dass der Inhalt des Dreiecks maximal wird und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

(4 Punkte)

1.4

Von einer ganzrationalen Funktion g mit dem Schaubild K_g sind die folgenden Werte bekannt:

x	-3	-2	-1	0	2
$g(x)$		-1,5	0	2,5	
$g'(x)$	-36		4	0	-4
$g''(x)$			0	-6	0

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Antwort mit den Angaben aus der Tabelle.

a) Das Schaubild von g geht durch den Punkt $P(-2/1,5)$.

b) g hat in $x = -1$ eine doppelte Nullstelle.

c) K_g hat eine Normale mit der Steigung 0,25.

d) K_g hat im Schnittpunkt mit der y -Achse einen Hochpunkt.

(6 Punkte)

Das Schaubild K_h einer Funktion h mit $h(x) = -ax + b - e^{-0,5x}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $a, b > 0$ entspricht einem der folgenden Schaubilder.

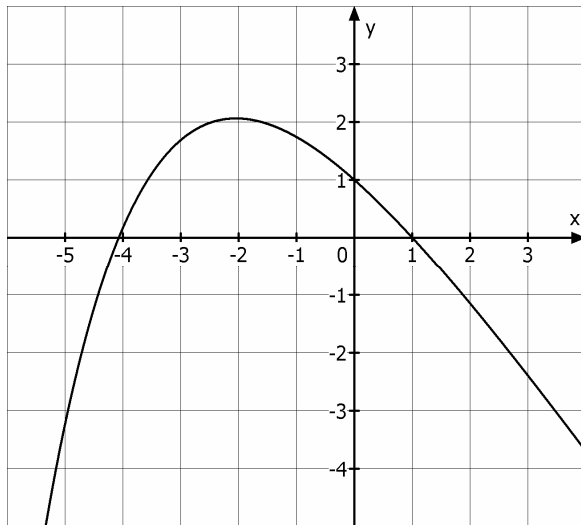


Abb. 1

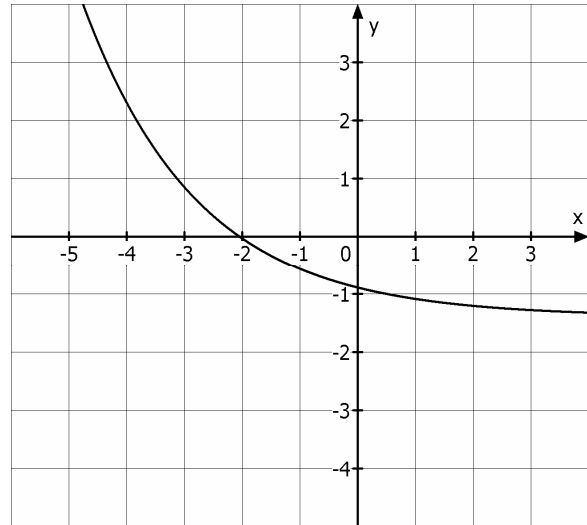


Abb. 2

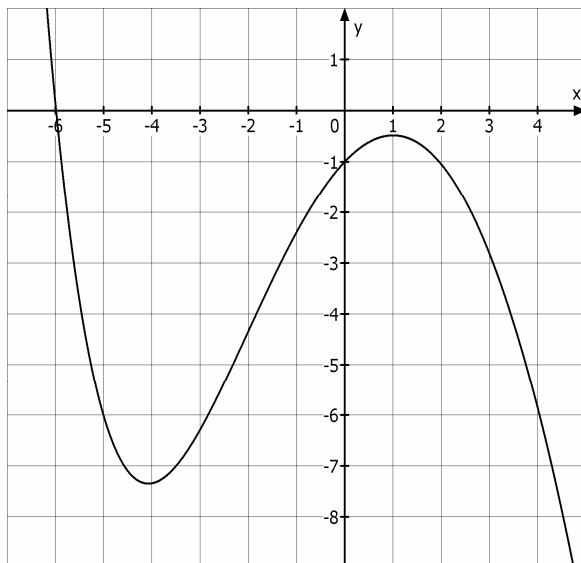


Abb. 3

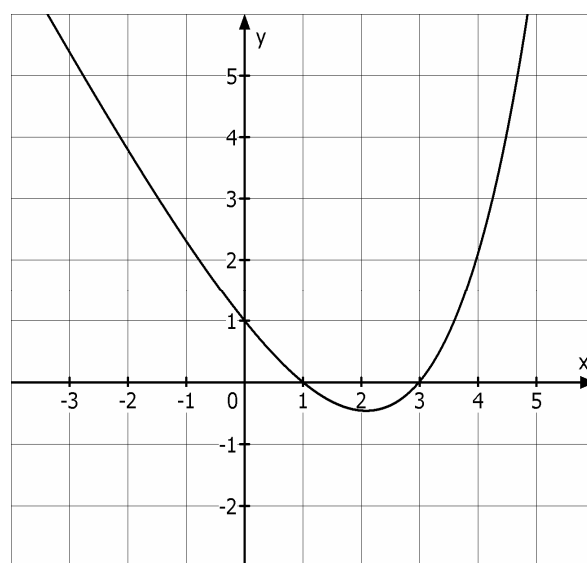


Abb. 4

1.5

Begründen Sie, warum nur Abb.1 das Schaubild K_h sein kann.

Von den anderen drei Abbildungen zeigt eine das Schaubild der Ableitungsfunktion h' und eine andere das Schaubild einer Stammfunktion H von h .

Ordnen Sie diese zu und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(7 Punkte)

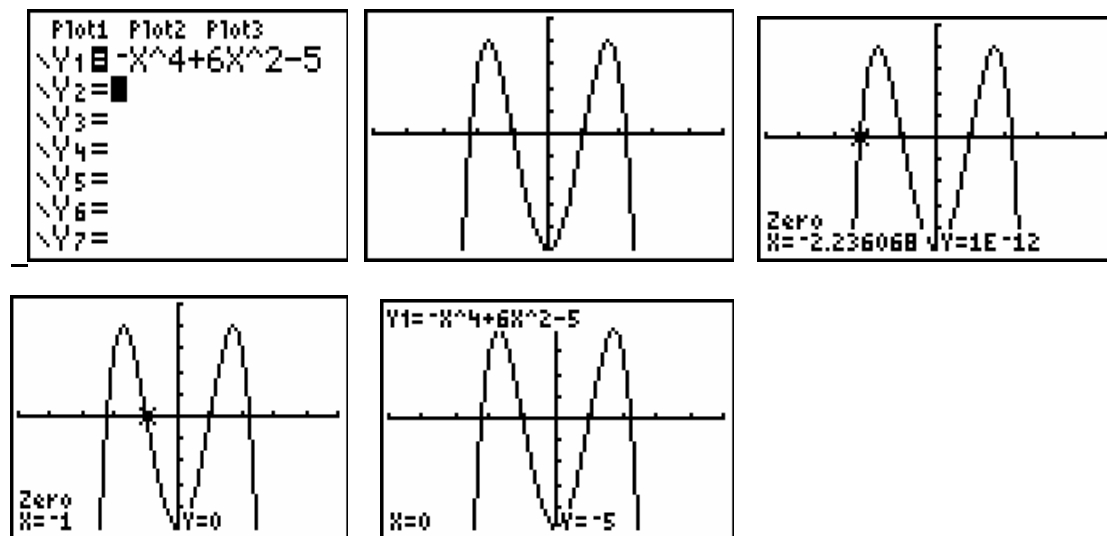
30 Punkte

Lösung

1.1

Achsenschnittpunkte:

Ermittlung mit Hilfe des GTR:



Schnittpunkte mit der x-Achse: Ansatz: $f(x) = 0$
 $N_1(-2,24/0)$; $N_2(-1/0)$; $N_3(1/0)$; $N_4(2,24/0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: Ansatz $f(0)$
 $S_y(0/-5)$

Exakte Koordinaten der Extrempunkte:

Ableitungen:

$$f'(x) = -4x^3 + 12x$$

$$f''(x) = -12x^2 + 12$$

$$f'''(x) = -24x$$

Notwendige und hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow -4x^3 + 12x = 0 \\ &\Rightarrow 4x \cdot (-x^2 + 3) = 0 \end{aligned}$$

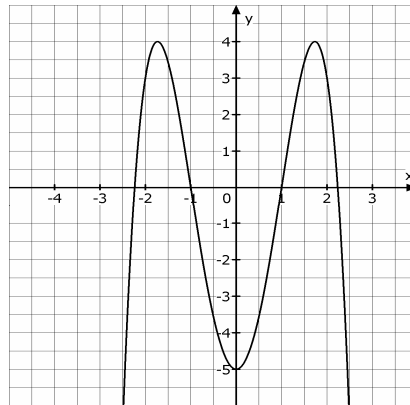
$$\text{Daraus folgt: } x = 0 \text{ oder } x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$f''(0) = 12 > 0 \Rightarrow \text{TP}(0/-5) \quad ((f(0) = -5))$$

$$f''(-\sqrt{3}) = -24 < 0 \Rightarrow \text{HP}(-\sqrt{3}/4) \quad (f(-\sqrt{3}) = -9 + 18 - 5 = 4)$$

$$f''(\sqrt{3}) = -24 < 0 \Rightarrow \text{HP}(\sqrt{3}/4) \quad (f(\sqrt{3}) = -9 + 18 - 5 = 4)$$

Zeichnung:



1.2

Berechnung der Wendepunkte:

Notwendige und hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -12x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f'''(\pm 1) \neq 0 \text{ und damit } W_1(-1/0) \text{ und } W_2(1/0)$$

Berechnung der Wendetangenten:

Allgemeine Tangentengleichung mit Berührstelle u : $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

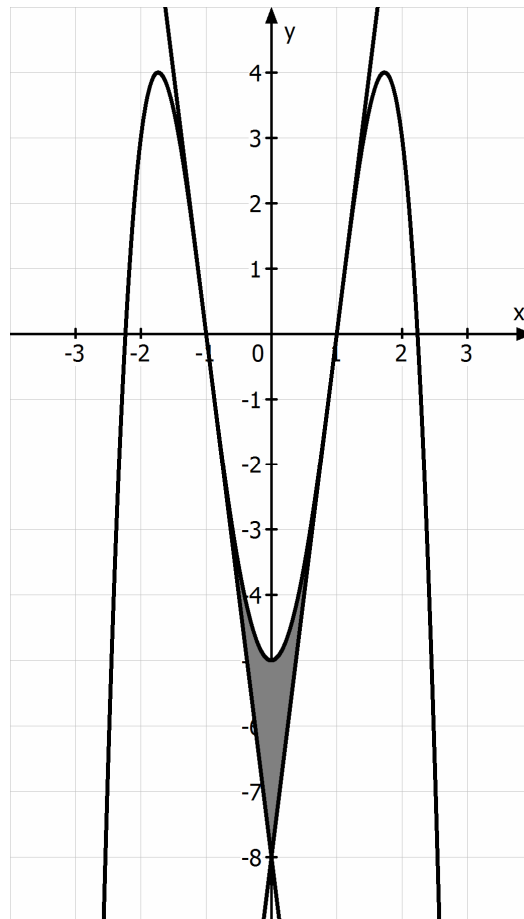
$$\begin{aligned} \text{Tangente in } W_1 (u = -1): y &= f'(-1) \cdot (x + 1) + f(-1) \\ y &= -8(x + 1) + 0 \Rightarrow y = -8x - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tangente in } W_2 (u = 1): y &= f'(1) \cdot (x - 1) + f(1) \\ y &= 8(x - 1) + 0 \Rightarrow y = 8x - 8 \end{aligned}$$

Fläche zwischen Tangenten und Schaubild von f:

Die Fläche wird gemäß der unteren Abbildung mit dem folgenden Integral bestimmt:

$$A = 2 \cdot \int_0^1 (f(x) - (8x - 8)) dx \quad (\text{die Flächen links und rechts von der y-Achse sind gleich groß})$$

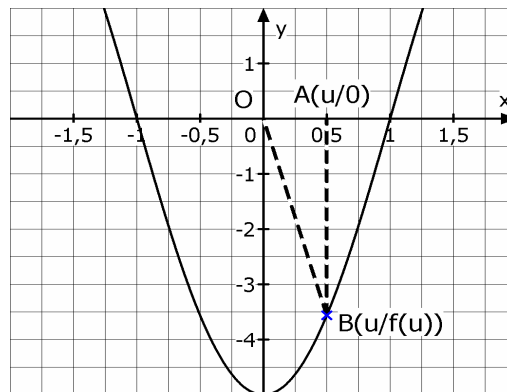


Berechnung mit dem GTR:

```
fnInt(-X^4+6X^2-5-(8X-8),X,0,1)*
2
1.6
```

Damit beträgt die gesuchte Fläche $A = 1,6$ FE.

1.3



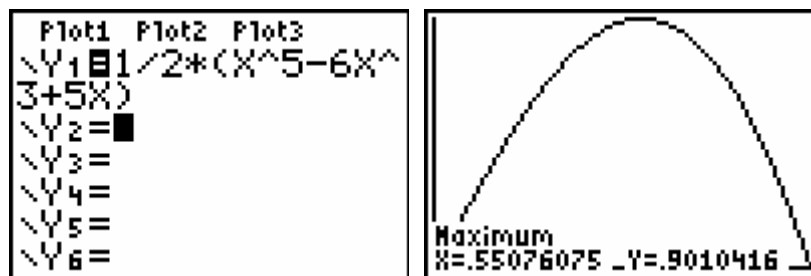
Die Fläche des Dreiecks wird folgendermaßen berechnet: $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AB}$

Für die beiden Strecken gilt: $\overline{OA} = u - 0 = u$ und $\overline{AB} = 0 - f(u) = -f(u)$

Die Flächeninhaltsfunktion lautet $A(u) = \frac{1}{2} u \cdot (-f(u)) = \frac{1}{2} (u^5 - 6u^3 + 5u)$ mit $0 \leq u \leq 1$

Berechnung des Maximums mit dem GTR:

Die Bedingung für das Maximum lautet $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$



Die Flächeninhaltsfunktion hat ein relatives Maximum für $u = 0,55$ mit $A(0,55) = 0,901$ FE.

Die Randwerte liefern mit $A(0) = 0$ und $A(1) = 0$ keine höheren Werte, daher ist die maximale Fläche 0,901 FE.

1.4

- Die Aussage ist falsch, da $g(-2) = -1,5$ ist. Der Punkt $P(-2/-1,5)$ würde auf dem Schaubild liegen.
- Die Aussage ist falsch. Bei einer doppelten Nullstelle müsste bei $x = -1$ ein Extrempunkt vorliegen. Das hieße aber $g'(-1) = 0$, was aber nicht der Fall ist.
- Die Aussage ist wahr. Wenn die Normale die Steigung 0,25 besitzt, besitzt die zugehörige Tangente die Steigung $m_{\text{Tangente}} = -\frac{1}{m_{\text{Normale}}} = -\frac{1}{0,25} = -4$.

Da $g'(2) = -4$ ist, existiert diese Tangentensteigung beim Schaubild von g .

- Die Aussage ist wahr, da $g'(0) = 0$ und $g''(0) < 0$ ist.

1.5

Die Funktion $h(x) = -ax + b - e^{-0,5x}$ mit $a, b > 0$ besitzt die schiefe Asymptote $y = -ax + b$ für $x \rightarrow +\infty$.

Das Schaubild 2 hat eine waagrechte Asymptote für $x \rightarrow +\infty$

Das Schaubild 3 hat keine schiefe Asymptote.

Das Schaubild 4 hat eine schiefe Asymptote für $x \rightarrow -\infty$

Somit kann $h(x)$ nur zu Schaubild 1 gehören.

Das Schaubild von h besitzt für $x \approx -2,1$ einen Hochpunkt.

Damit muss das Schaubild der Ableitungsfunktion bei $x \approx -2,1$ den Wert Null annehmen.

Dies gilt für Abb. 2, also ist Abb. 2 das Schaubild von $h'(x)$.

Das Schaubild von h besitzt bei $x = 1$ eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von + nach -.

Daraus folgt, dass das Schaubild der Stammfunktion H bei $x = 1$ einen Hochpunkt besitzen muss.

Somit kann nur Abb. 3 das Schaubild der Stammfunktion H sein.