

Hauptprüfung 2011 Aufgabe 1

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_f .

1.1

Geben Sie die Koordinaten der Extrempunkte an und zeichnen Sie K_f .

Berechnen Sie die exakten Grenzen des Intervalls, auf dem K_f linksgekrümmt ist.

Bestimmen Sie alle Werte von c , für die die Gerade $y = c$ das Schaubild K_f in vier Punkten schneidet.

K_f soll in y -Richtung so gestreckt werden, dass die Hochpunkte den y -Wert 4 haben.

Bestimmen Sie den veränderten Funktionsterm.

(12 Punkte)

Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = 2 - 5e^{-0.5x}$. Ihr Schaubild ist K_g .

1.2

Zeichnen Sie K_g .

Geben Sie die Gleichung einer Ursprungsgeraden an, die K_g in zwei Punkten schneidet, und zeichnen Sie diese Gerade ein.

(4 Punkte)

1.3

Eine Parallele zur Geraden mit der Gleichung $y = x$ berührt K_g in Punkt B. Berechnen Sie die exakten Koordinaten von B.

Geben Sie die Gleichung dieser Parallelen an.

(6 Punkte)

1.4

Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die K_g mit den Koordinatenachsen einschließt.

(3 Punkte)

1.5

Bestimmen Sie $u > 0$, so dass $\int_0^u g(x) dx = 0$ gilt.

(5 Punkte)

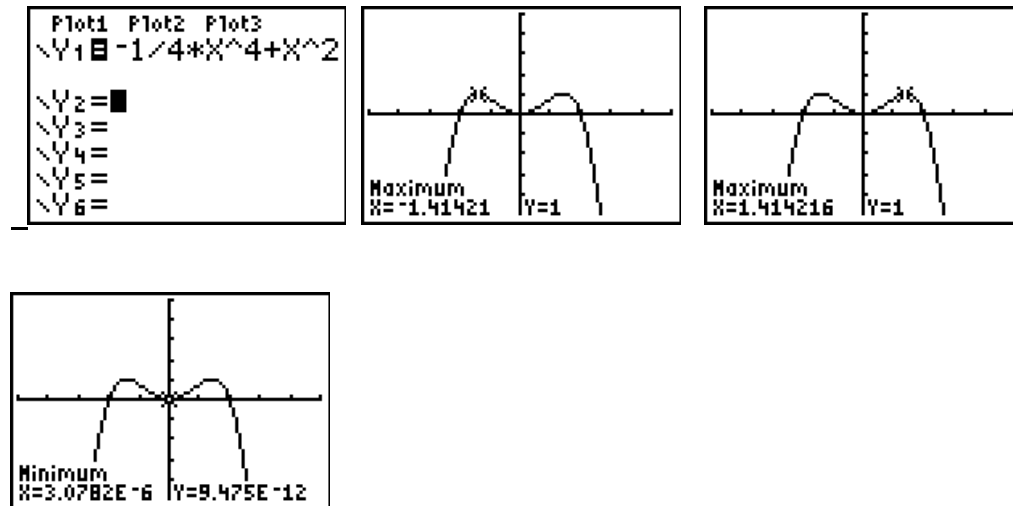
30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2011 Aufgabe 1

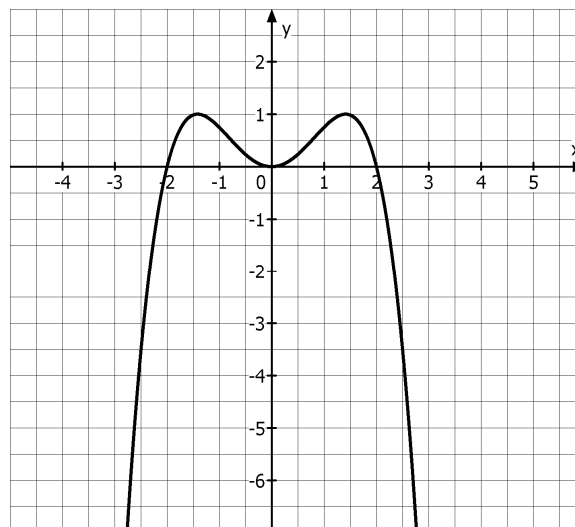
1.1

Exrempunkte:

Ermittlung mit Hilfe des GTR:



Mit dem GTR folgt: Hochpunkte HP1(-1,414/1) HP2(1,414/1)
Tiefpunkt TP(0/0)



Exakte Grenzen, in denen das Schaubild linksgekrümmt ist

Die Wendepunkte eines Schaubildes sind die Übergangspunkte zwischen einem rechts- und linksgekrümmten Kurvenstück.

Ableitungen:

$$f'(x) = -x^3 + 2x$$

$$f''(x) = -3x^2 + 2$$

$$f'''(x) = -6x$$

Berechnung der Wendestellen (x-Werte der Wendepunkte):

Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$-3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$f'''(\sqrt{\frac{2}{3}}) = -6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0$ und damit existiert bei $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ein Wendepunkt.

$f'''(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = 6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0$ und damit existiert bei $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ ein Wendepunkt.

Anhand des Schaubildes kann man nun erkennen:

Für $x < -\sqrt{\frac{2}{3}}$ und für $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$ ist das Schaubild rechtsgekrümmt.

Für $-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$ ist das Schaubild linksgekrümmt.

Bestimmen des Wertes von c:

Die Gerade $y = c$ ist eine waagrechte Gerade auf der Höhe c.

Die Gerade schneidet das Schaubild in vier Punkten, wenn sich die Gerade oberhalb der x-Achse und unterhalb der Hochpunkte befindet.

Es muss somit gelten: $0 < c < 1$.

Gestrecktes Schaubild.

Der Streckfaktor in y-Richtung sei k.

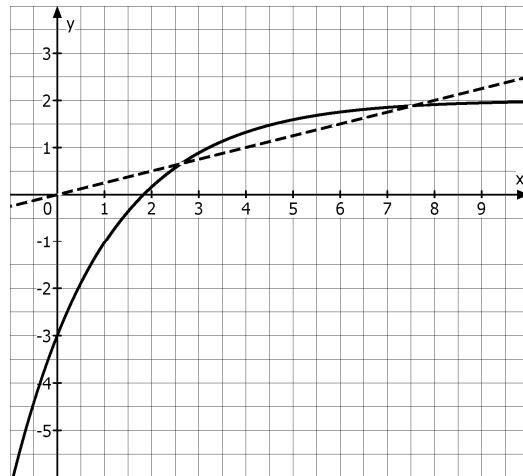
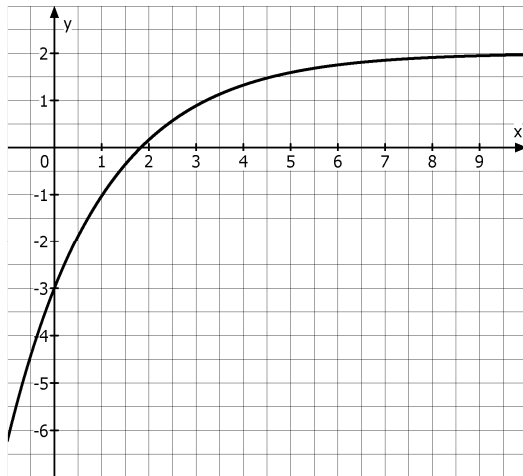
Als Funktionsterm ergibt sich $f^*(x) = k \cdot \left(-\frac{1}{4}x^4 + x^2 \right)$

Die Hochpunkte besitzen einen aktuellen y-Wert von 1.

Damit die Hochpunkte den y-Wert 4 besitzen, muss das Schaubild in y-Richtung mit dem Faktor 4 gestreckt werden.

Somit gilt für den veränderten Funktionsterm: $f^*(x) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}x^4 + x^2 \right) = -x^4 + 4x^2$

1.2



Gleichung einer Ursprungsgeraden:

Gemäß des rechten Schaubildes zeichnet man eine beliebige Gerade ein, die durch den Ursprung verläuft und das Schaubild in zwei Punkten schneidet.

Die allgemeine Gleichung der Ursprungsgerade lautet $y = m \cdot x$

Die Berechnung von m ermittelt man entweder durch Ablesen der Steigung (mit Hilfe des Steigungsdreiecks) oder durch Einsetzen eines Punktes der Geraden.

Der Punkt $P(4/1)$ liegt auf der Geraden: $1 = m \cdot 4 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$.

Daher lautet die Gleichung einer Ursprungsgeraden $y = \frac{1}{4}x$.

(Dies ist allerdings nicht die einzig mögliche Lösung !)

1.3

Die gegebene Gerade $y = x$ besitzt die Steigung 1.

Die gesuchte parallele Gerade besitzt ebenfalls die Steigung $m = 1$.

Gesucht ist daher ein Punkt B, in dem die Steigung $m = 1$ vorliegt

Ansatz: $f'(x) = 1$

Mit $f'(x) = -5 \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x} = 2,5e^{-0,5x}$ folgt

$$2,5e^{-0,5x} = 1 \Rightarrow e^{-0,5x} = \frac{2}{5} \Rightarrow -0,5x = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \Rightarrow x = -2 \cdot \ln\left(\frac{2}{5}\right)$$

Der y-Wert von B lautet $f\left(-2\ln\left(\frac{2}{5}\right)\right) = 2 - 5e^{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} = 0$

Koordinaten von B: $B\left(-2\ln\left(\frac{2}{5}\right) / 0\right)$

Gleichung der Parallelen: $y = 1 \cdot x + c$

Einsetzen von B: $0 = -2\ln\left(\frac{2}{5}\right) + c \Rightarrow c = 2\ln\left(\frac{2}{5}\right)$

Gleichung der Parallelen: $y = x + 2\ln\left(\frac{2}{5}\right)$

1.4

Zur Berechnung der Fläche muss zunächst der Schnittpunkt des Schaubildes von $g(x)$ mit der x-Achse berechnet werden:

$$g(x) = 0 \Rightarrow 2 - 5e^{-0,5x} = 0 \Rightarrow e^{-0,5x} = \frac{2}{5} \Rightarrow -0,5x = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \Rightarrow x = -2\ln\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\text{Fläche} = \left| \int_0^{-2\ln\left(\frac{2}{5}\right)} g(x) dx \right| \approx 2,335$$

<pre> Plot1 Plot2 Plot3 \Y1=2-5*e^(-0.5X)) \Y2= \Y3= \Y4= \Y5= \Y6= </pre>	<pre> fnInt(Y1,X,0,-2* ln(2/5)) -2.334837073 </pre>
---	---

1.5

$$\int_0^u g(x) dx = \int_0^u (2 - 5e^{-0,5x}) dx = \left[2x + 10e^{-0,5x} \right]_0^u = 2u + 10e^{-0,5u} - 10$$

Es soll gelten: $2u + 10e^{-0,5u} - 10 = 0$

Mit dem GTR folgt $u \approx 4,463$.