

Hauptprüfung 2011 Aufgabe 2

In einem 22 °C warmen Zimmer steht eine Tasse Kaffee.
Während des Abkühlungsvorganges werden folgende Temperaturen gemessen:

Zeit t in Minuten	0	2	5	8	10	15	20
Temperatur T in °C	80	73	63	65	51	44	36

2.1

Übertragen Sie die Daten in ein geeignetes Koordinatensystem.
Zu einem Zeitpunkt wurde der Temperaturwert falsch gemessen.
Begründen Sie, um welchen Wert es sich handelt.

(4 Punkte)

2.2

Berechnen Sie für die ersten fünf Minuten und die letzten fünf Minuten des Messvorgangs die durchschnittliche Abkühlung des Kaffees in °C pro Minute.

(4 Punkte)

Die Funktion f ist gegeben mit $f(t) = 58e^{-0,07t} + 22$, $t \geq 0$,
wobei f(t) die Temperatur in °C und t die Zeit in Minuten angibt.

2.3

Zeigen Sie, dass durch die Funktion f der Abkühlungsvorgang des Kaffees näherungsweise beschrieben wird.

(4 Punkte)

2.4

Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Kaffee die Temperatur von 58°C erreicht hat.

(2 Punkte)

2.5

Zeigen Sie, dass die Funktion g mit $g(t) = -4,06e^{-0,07t}$, $t \geq 0$,
die momentane Änderungsrate der Temperatur des Kaffees beschreibt.

Bestimmen Sie $\int_0^5 g(t)dt$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf den

Abkühlungsvorgang.

(6 Punkte)

Das Schaubild einer Funktion geht durch den Punkt P(1/4) und hat die Tiefpunkte $T_1(-1/-2)$ und $T_2(3/-2)$.

2.6

Bestimmen Sie den Term einer ganzrationalen Funktion, deren Schaubild die obigen Eigenschaften hat.

(6 Punkte)

2.7

Bestimmen Sie den Term einer trigonometrischen Funktion, deren Schaubild neben den obigen Eigenschaften in Punkt P(1/4) einen Hochpunkt hat.

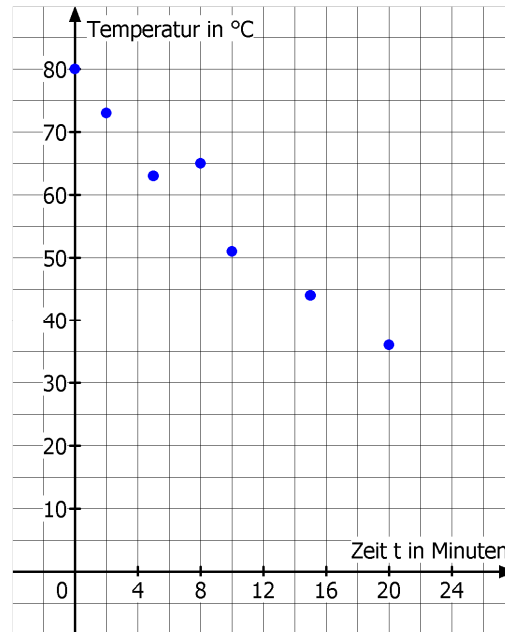
(4 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2011 Aufgabe 2

2.1

Einzeichnen der Daten in ein Koordinatensystem:



Zum Zeitpunkt $t = 8$ wurde die Temperatur falsch gemessen, da es sich um einen Abkühlungsvorgang handelt und die Temperatur ständig abnehmen muss.

2.2

Durchschnittliche Abkühlung in den ersten fünf Minuten:

$$\frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{63 - 80}{5} = -\frac{17}{5} = -3,4 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$$

Die Temperatur nimmt pro Minute durchschnittlich um $3,4^{\circ}\text{C}$ ab.

Durchschnittliche Abkühlung in den letzten fünf Minuten:

$$\frac{f(20) - f(15)}{20 - 15} = \frac{36 - 44}{5} = -\frac{8}{5} = -1,6 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$$

Die Temperatur nimmt pro Minute durchschnittlich um $1,6^{\circ}\text{C}$ ab.

2.3

Um zu prüfen, ob die Funktion f den Abkühlungsvorgang beschreibt, werden zunächst einige Funktionswerte berechnet, um diese mit den Tabellenwerten zu vergleichen:

$f(0) = 80$ (stimmt mit dem Tabellenwert überein)

$f(2) = 72,4$ (stimmt fast mit dem Tabellenwert 73 überein)

$f(5) = 62,9$ (stimmt fast mit dem Tabellenwert 63 überein)

$f(20) = 36,3$ (stimmt fast mit dem Tabellenwert 36 überein)

Da das Zimmer 22°C warm ist, wird der Kaffee langfristig auf diese Zimmertemperatur abkühlen.

Für die Funktion f gilt: Für $t \rightarrow \infty$ strebt $f(t) \rightarrow 22$, da $58e^{-0,07t} \rightarrow 0$ strebt. Daher stimmt auch dieser langfristige Wert überein.

2.4

Zeitpunkt, zu dem der Kaffee 58°C besitzt:

$$58 = 58e^{-0,07t} + 22 \Rightarrow 36 = 58e^{-0,07t} \Rightarrow e^{-0,07t} = \frac{18}{29} \Rightarrow t = \frac{1}{-0,07} \ln\left(\frac{18}{29}\right) \approx 6,8 \text{ min}$$

Die Temperatur wird in knapp 7 Minuten erreicht.

2.5

Die Änderungsrate wird beschrieben als Ableitungsfunktion der Temperaturfunktion.

Es gilt $f'(t) = -4,06e^{-0,07t}$ und diese stimmt mit der gegebenen Funktion $g(t)$ überein.

$$\text{Es gilt } \int_0^5 g(t) dt = -17,1 \text{ (GTR)}$$

Das Ergebnis $-17,1^{\circ}\text{C}$ bedeutet, dass der Kaffee in den ersten fünf Minuten um $17,1^{\circ}\text{C}$ abkühlt.

2.6

In der Aufgabe ist nicht angegeben, um welchen Grad es sich bei der ganzrationalen Funktion handeln soll – dies muss man selbst herausfinden.

Es handelt sich um eine Funktion 4. Grades. Dies kann man folgendermaßen begründen:

- 1.) Aus den gegebenen Punkten und Punkteigenschaften kann man insgesamt 5 Bedingungen erzeugen. Somit müssen in der Funktion 5 Unbekannte vorkommen, also

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

- 2.) Das Schaubild besitzt zwei Tiefpunkte. Somit muss zwischen den beiden Tiefpunkten auch ein Hochpunkt existieren. Eine Funktion mit 3 Extrempunkten bedeutet, dass die Ableitungsfunktion eine Funktion 3. Grades sein muss, also muss $f(x)$ eine Funktion 4. Grades sein.

Bestimmung des Funktionsterms:

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Ableitung: $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$P(1/4): f(1) = 4 \Rightarrow a + b + c + d + e = 4$

$T_1(-1/-2) \Rightarrow f(-1) = -2 \Rightarrow a - b + c - d + e = -2$

$T_2(3/-2) \Rightarrow f(3) = -2 \Rightarrow 81a + 27b + 9c + 3d + e = -2$

$f'(-1) = 0 \Rightarrow -4a + 3b - 2c + d = 0$

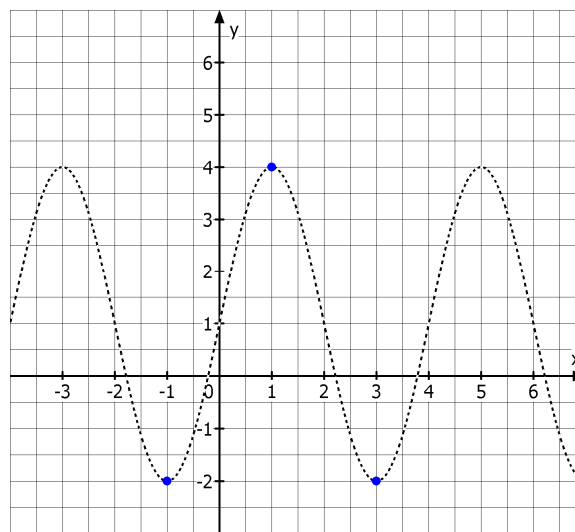
$f'(3) = 0 \Rightarrow 108a + 27b + 6c + d = 0$

Mit dem GTR ergibt sich: $a = \frac{3}{8}, b = -\frac{3}{2}, c = -\frac{3}{4}, d = \frac{9}{2}, e = \frac{11}{8}$

Die Funktion lautet $f(x) = \frac{3}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{11}{8}$

2.7

Zur Bestimmung der trigonometrischen Funktion sollte das Schaubild anhand der vorgegebenen Punkte skizziert werden.



Anhand der Skizze ergibt sich als Funktionsansatz $f(x) = a \cdot \sin(k \cdot x) + c$

Es gilt $c = 1$, da das Schaubild gegenüber der Grundsinusfunktion um 1 Einheit nach oben verschoben ist.

Die Amplitude beträgt $a = 3$ da $a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{4 - (-2)}{2} = 3$.

Die Periode beträgt 4, also gilt $k = \frac{2\pi}{\text{Periode}} = \frac{\pi}{2}$.

Somit gilt: $f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$