

Hauptprüfung 2011 Aufgabe 5

5.1

Gegeben sind drei Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \\ a & 3 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 38 & 3 \\ 39 & b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & c & -4 & 3 \\ 3 & 1 & d & 4 \end{pmatrix}$$

Bezeichnen Sie diese Matrizen mit A, B und C so, dass $A \cdot B = C$ gilt.

Berechnen Sie die Werte von a, b, c und d.

(6 Punkte)

Eine Kosmetikfabrik stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 drei verschiedene Mischsubstanzen M_1, M_2 und M_3 her. Aus diesen Mischsubstanzen werden drei verschiedene Lippenstifte L_1, L_2 und L_3 hergestellt.

Folgende Tabellen zeigen den Materialbedarf in Mengeneinheiten (ME):

	L_1	L_2	L_3
M_1	2	2	7
M_2	4	1	3
M_3	1	5	5

	L_1	L_2	L_3
R_1	11	9	18
R_2	10	18	38
R_3	7	8	15
R_4	28	21	46

5.2

Für einen Auftrag werden 200 ME M_1 , 120 ME M_2 und 330 ME M_3 benötigt.

Berechnen Sie den Rohstoffbedarf.

(6 Punkte)

5.3

Die Rohstoffpreise betragen in Geldeinheiten (GE) pro ME

$$\overline{k_R} = (0,05 \quad 0,03 \quad 0,07 \quad 0,05).$$

Ein Kunde bestellt 500 Lippenstifte L_1 und 400 Lippenstifte L_3 .

Berechnen Sie die gesamten Rohstoffkosten für diese Bestellung.

(5 Punkte)

Die Zweigwerke Z_1, Z_2 und Z_3 eines Unternehmens sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten.

Für die Technologiematrix A gilt:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,2 \\ -0,3 & 0,8 & -0,1 \\ -0,4 & -0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

5.4

Bestimmen Sie die Technologiematrix A .

(3 Punkte)

5.5

In der vergangenen Produktionsperiode belieferten die Zweigwerke sich gegenseitig und den Markt gemäß folgender Tabelle (Mengeinheiten in ME):

	Z_1	Z_2	Z_3	Markt
Z_1	x_{11}	100	100	160
Z_2	120	x_{22}	50	630
Z_3	160	100	x_{33}	90

Berechnen Sie den Produktionsvektor $\vec{x}$ und die Eigenverbrauchsmengen x_{11}, x_{22} und x_{33} .

(5 Punkte)

5.6

Eine Marktstudie hat ergeben, dass alle Zweigwerke zusammen in Zukunft 1800 ME an den Markt abgeben können.

Die Liefermengen der Zweigwerke Z_1 und Z_3 an den Markt sind gleich groß.

Das Zweigwerk Z_2 liefert dreimal so viel wie Z_1 an den Markt.

Wie viel müssen die Zweigwerke jeweils produzieren, um den Markt bedienen zu können ?

(5 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2011 Aufgabe 5

5.1

Für die Multiplikation zweier Matrizen gilt hinsichtlich ihrer Formate:

$$(m \times n) \cdot (n \times k) = (m \times k)$$

Die drei gegebenen Matrizen haben das Format (4×2) und (2×2) und (2×4) .

Folgende Formate können multipliziert werden:

$$(4 \times 2) \cdot (2 \times 2) = (4 \times 2) \quad (\text{nicht möglich, da die } (2 \times 4)\text{-Matrix nicht auftritt})$$

$$(2 \times 4) \cdot (4 \times 2) = (2 \times 2) \quad \text{ist möglich}$$

Daher gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & c & -4 & 3 \\ 3 & 1 & d & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \\ a & 3 \\ 7 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 38 & 3 \\ 39 & b \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 + 3c - 4a + 21 & -6 - 5c - 12 + 36 \\ 6 + 3 + ad + 28 & -9 - 5 + 3d + 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a + 3c + 25 & 18 - 5c \\ 37 + ad & 34 + 3d \end{pmatrix}$$

Der Vergleich mit Matrix C liefert:

$$18 - 5c = 3 \Rightarrow c = 3$$

$$-4a + 3c + 25 = 38 \Rightarrow a = -1$$

$$37 + ad = 39 \Rightarrow d = -2$$

$$34 + 3d = b \Rightarrow b = 28$$

5.2

Gegeben ist die Rohstoff-Endprodukt-Matrix $C = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 18 \\ 10 & 18 & 38 \\ 7 & 8 & 15 \\ 28 & 21 & 46 \end{pmatrix}$

Gegeben ist die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A ergibt sich aus der Formel $A \cdot B = C \Rightarrow A = C \cdot B^{-1}$

Mit dem GTR folgt: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$

Gegeben ist der Zwischenproduktvektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 330 \end{pmatrix}.$

Gesucht ist der Rohstoffvektor $\vec{r}.$

Mit der Formel $\vec{r} = A \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 770 \\ 1460 \\ 650 \\ 1860 \end{pmatrix}$ folgt:

Von R_1 werden 770 ME, von R_2 1460 ME, von R_3 650 ME und von R_4 1860 ME benötigt.

5.3

Gegeben ist der Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \\ 400 \end{pmatrix}$

Die hierfür benötigten Rohstoffmengen betragen $\vec{r} = C \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 12700 \\ 20200 \\ 9500 \\ 32400 \end{pmatrix}$

Rohstoffkosten = $0,05 \cdot 12700 + 0,03 \cdot 20200 + 0,07 \cdot 9500 + 0,05 \cdot 32400 = 3526$ GE

5.4

Mit der Matrix $E - A = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,2 \\ -0,3 & 0,8 & -0,1 \\ -0,4 & -0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$

Folgt $A = E - (E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,2 \\ -0,3 & 0,8 & -0,1 \\ -0,4 & -0,1 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$

5.5

Gegeben ist der Marktabgabevektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 160 \\ 630 \\ 90 \end{pmatrix}$.

Anwendung der Leontiefgleichung liefert den Produktionsvektor $\vec{x}$:

$$\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 400 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Es gilt $x_{11} = 400 - 160 - 100 - 100 = 40$

Es gilt $x_{22} = 1000 - 630 - 120 - 50 = 200$

Es gilt $x_{33} = 500 - 90 - 160 - 100 = 150$

5.6

Für den Marktabgabevektor gilt $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 3y_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

Außerdem gilt $y_1 + 3y_1 + y_1 = 1800 \Rightarrow y_1 = 360$

Also gilt $\vec{y} = \begin{pmatrix} 360 \\ 1080 \\ 360 \end{pmatrix}$

Der zugehörige Produktionsvektor lautet $\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 360 \\ 1080 \\ 360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 891 \\ 1845 \\ 1287 \end{pmatrix}$

Das erste Zweigwerk muss 891 ME, das zweite Zweigwerk 1845 ME und das dritte Zweigwerk 1287 ME produzieren.