

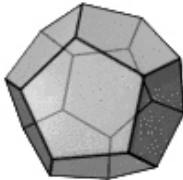
Hauptprüfung 2011 Aufgabe 6

Eine Klasse eines Berufskollegs möchte ihre Klassenkasse für die Abschlussfahrt aufbessern und hat dafür ein Glücksspiel entwickelt. Dafür werden ein gelber und ein blauer Spielwürfel verwendet, die sich nur in der Farbe unterscheiden.

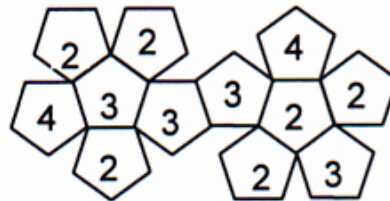
Die Oberfläche jedes Würfels besteht aus 12 gleichseitigen Fünfecken.

Die beiden Würfel sind gemäß der Abbildung mit den Zahlen 2,3,4 beschriftet.

Würfel



Abwicklung



Bei dem Spiel „Die verflixte Sechs“ werden beide Würfel gleichzeitig geworfen.

Die Augenzahl des gelben Würfels wird mit sich selbst multipliziert und das Ergebnis zur Augenzahl des blauen Würfels dazugezählt. Diese Zahl ist das Ergebnis eines Spiels.

6.1

Zeichnen Sie ein geeignetes Baumdiagramm für ein Spiel und geben Sie für jedes mögliche Ergebnis die zugehörige Wahrscheinlichkeit an. (6 Punkte)

6.2

Welche Wahrscheinlichkeiten ergeben sich für folgende Ereignisse ?

A: Das Ergebnis eines Spiels ist größer als dreizehn.

B: Das Ergebnis eines Spiels ist eine Zahl, die ohne Rest durch drei teilbar ist.

C: Das Ergebnis eines Spiels ist kleiner als zwanzig. (6 Punkte)

6.3

Zeigen Sie, dass es bei diesem Glücksspiel wahrscheinlicher ist, bei zwei aufeinander folgenden Spielen genau einmal das Ergebnis „Sechs“ zu erreichen, als bei vier aufeinander folgenden Spielen genau zweimal das Ergebnis „Sechs“ zu erreichen. (6 Punkte)

6.4

Das Spiel „Die verflixte Sechs“ soll an einem Tag der offenen Tür der Schule angeboten werden und der Spielerlös der Klassenkasse zugutekommt. Für dieses Spiel gelten folgende Bedingungen:

Der Einsatz je Spiel beträgt 0,50 €. Ein Spieler erhält 2 € für das Ergebnis „Zwanzig“ und 1 € für das Ergebnis „Achtzehn“ oder „Neunzehn“.

Ein Spieler muss für das Ergebnis „Sechs“ nochmals 0,50 € bezahlen.

In allen anderen Fällen gibt es weder Auszahlung noch Zuzahlung.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für alle Auszahlungsbeträge an. (6 Punkte)

6.5

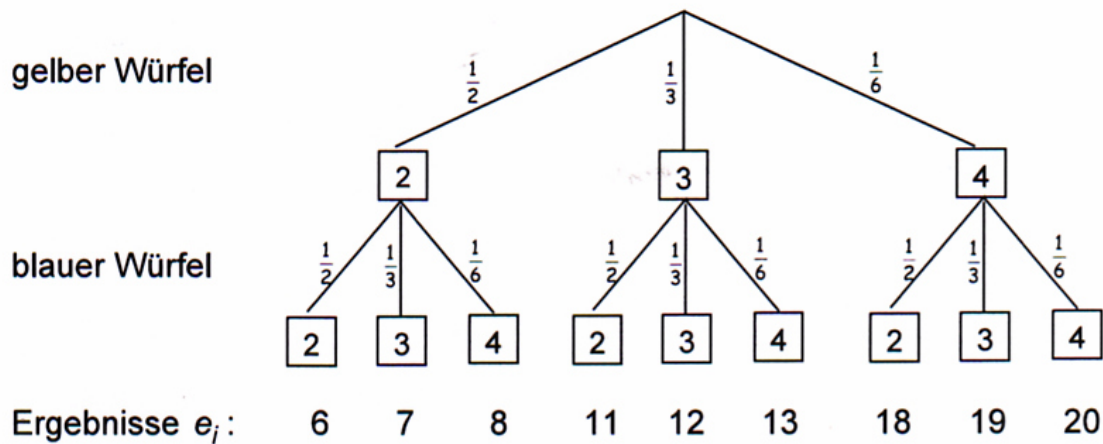
Die Klasse kalkuliert mit 200 Spielen. Mit welchem Gewinn kann sie rechnen ?

Wie müsste der Auszahlungsbetrag für das Ergebnis „Zwanzig“ abgeändert werden, damit das Spiel „fair“ wäre ? (6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2011 Aufgabe 6

6.1



Wahrscheinlichkeitstabelle

e_i	6	7	8	11	12	13	18	19	20
$P(e_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

6.2

$$P(A) = P(\{18, 19, 20\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = P(\{6, 12, 18\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{4}{9}$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(\{20\}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36} \quad (\text{Berechnung mit dem Gegenereignis von C})$$

6.3

$$\begin{aligned}
 P(\text{einmal „Sechs“ in zwei Spielen}) &= P(\text{Sechs, Nicht Sechs}) + P(\text{Nicht Sechs, Sechs}) \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} = 0,375
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{zweimal „Sechs“ in vier Spielen}) &= \\
 &= P(\bar{6}, \bar{6}, \bar{6}, \bar{6}) + P(\bar{6}, \bar{6}, 6, \bar{6}) + P(\bar{6}, 6, \bar{6}, \bar{6}) + P(\bar{6}, 6, 6, \bar{6}) + P(6, \bar{6}, \bar{6}, \bar{6}) + P(6, \bar{6}, 6, \bar{6}) \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{27}{128} \approx 0,21
 \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Behauptung wahr ist.

6.4

Folgende Auszahlungen sind bei dem Spiel möglich:

Auszahlung 2 € für das Ergebnis 20 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$

Auszahlung 1 € für die Ergebnisse 18 oder 19 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{5}{36}$

Auszahlung -0,50 € für das Ergebnis 6 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$

Auszahlung 0 € für die Ergebnisse 7, 8, 11, 12, 13 mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{7}{12}$$

6.5

Die erwartete Auszahlung pro Spiel beträgt:

$$E(\text{Auszahlung an Spieler}) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{5}{36} - 0,50 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{7}{12} = \frac{5}{72}$$

Der erwartete Gewinn für die Klasse pro Spiel beträgt $0,50 - \frac{5}{72} = \frac{31}{72} \approx 0,43$ Euro.

Bei 200 Spielen kann sie mit einem Gewinn von $200 \cdot \frac{31}{72} = 86,11$ Euro rechnen.

Nun wird der Auszahlungsbetrag für „Zwanzig“ geändert. Der gesuchte Auszahlungsbetrag sei x.

Die erwartete Auszahlung pro Spiel beträgt dann

$$E(\text{Auszahlung an Spieler}) = x \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{5}{36} - 0,50 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{7}{12} = \frac{1}{72} + \frac{1}{36}x$$

Ein Spiel heißt „fair“, wenn der erwartete Gewinn für die Klasse pro Spiel 0 Euro beträgt.

Der erwartete Gewinn für die Klasse pro Spiel sei

$$0,50 - \left(\frac{1}{72} + \frac{1}{36}x \right) = \frac{35}{72} - \frac{1}{36}x = 0 \Rightarrow x = 17,50$$

Bei einem fairen Spiel müsste bei der „Zwanzig“ 17,50 Euro ausbezahlt werden.