

Hauptprüfung 2010 Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild sei K_f .

1.1

Ermitteln Sie die Achsenschnittpunkte und die Extrempunkte von K_f .

Zeichnen Sie K_f .

Nennen Sie die Extremstellen einer Stammfunktion von f und begründen Sie Ihre Antwort. (9 Punkte)

1.2

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K_f an der Stelle $x = -2$.

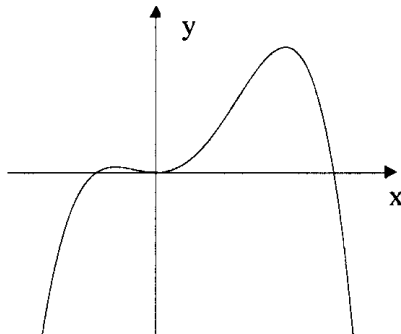
Zeigen Sie, dass diese Tangente K_f auch an der Stelle $x = 4$ berührt. (5 Punkte)

1.3

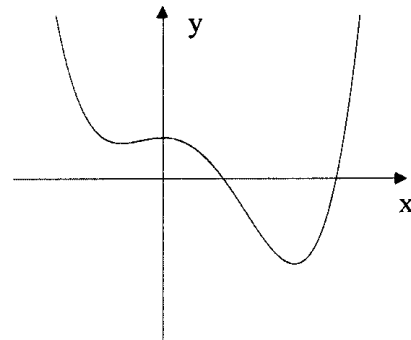
In dem Funktionsterm $f(x)$ wird der Koeffizient $-\frac{1}{8}$ von x^3 abgeändert.

Begründen Sie bei jedem der folgenden Schaubilder, dass es nicht zu dem geänderten Funktionsterm gehören kann, wenn die anderen Koeffizienten gleich bleiben.

a)



b)



(6 Punkte)

1.4

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 4 - 3e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild der Funktion g , die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ und die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ sowie die y -Achse schließen eine Fläche ein.

Bestimmen Sie deren Flächeninhalt. (4 Punkte)

1.5

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = a - be^{cx}$, $x \in \mathbb{R}$ und $a, b, c \neq 0$.

Das Schaubild von h geht durch den Ursprung und es gilt $h'(0) = h''(0)$.

Zeigen Sie, dass $a = b$ und $c = 1$ ist.

Legen Sie einen Punkt fest, der auf dem Schaubild der Funktion h mit $h(x) = a - ae^x$ liegt und berechnen Sie dann den Wert von a . (6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2010 Aufgabe 1

1.1

Berechnung der Achsenschnittpunkte:

Schnittpunkt mit der x-Achse: Ansatz $f(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 \mid \cdot 32$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 4x - 12) = 0$$

Daraus folgt $x_1 = 0$ oder $x^2 - 4x - 12 = 0$

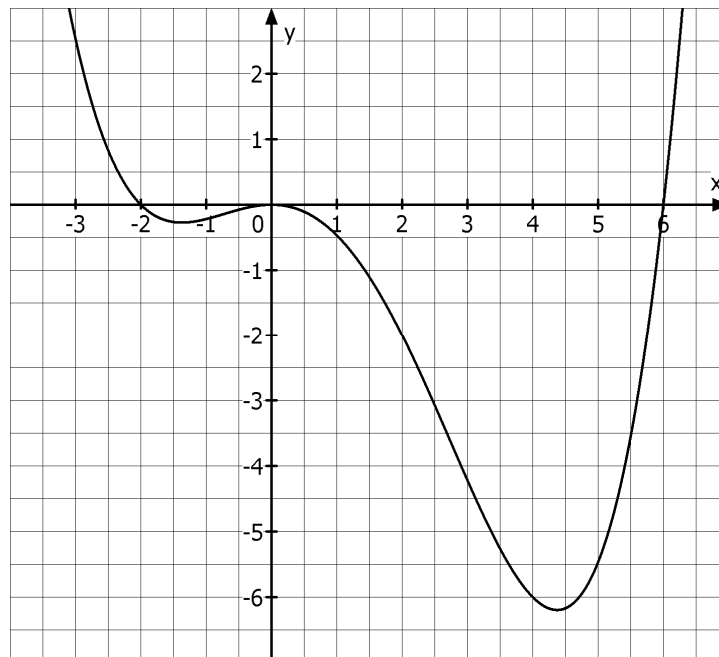
$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = -2$$

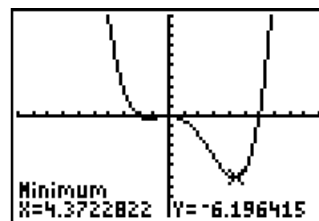
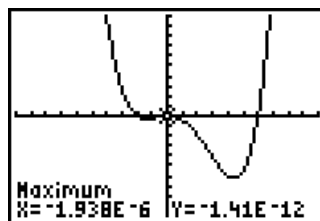
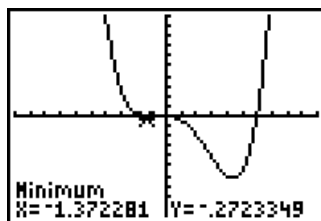
Die Schnittpunkte mit der x-Achse lauten $N_1(0/0)$, $N_2(6/0)$, $N_3(-2/0)$.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0 \Rightarrow S_y(0/0) = N_1$

Skizze:



Extrempunkte (mit GTR):



Es existiert ein Hochpunkt $H(0/0)$ und zwei Tiefpunkte $T_1(-1,37/-0,27)$ und $T_2(4,37/-6,2)$

Die Stammfunktion von f besitzt dort Extremstellen, an denen das Schaubild von f Nullstellen mit Vorzeichenwechsel besitzt.

Bei $x = -2$ besitzt f eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$
Die Stammfunktion von f besitzt an dieser Stelle einen Hochpunkt.

Bei $x = 6$ besitzt f eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$
Die Stammfunktion von f besitzt an dieser Stelle einen Tiefpunkt.

Hinweis: Bei $x = 0$ besitzt f eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel. Die Stammfunktion besitzt an dieser Stelle daher keinen Extrempunkt.

1.2

Aufstellen der Tangentengleichung:

Die Tangente besitzt den Berührungspunkt $B(-2/f(-2)) = B(-2/0)$.
Die Steigung der Tangente beträgt $f'(-2) = -1 = m$

Mit der Punkt-Steigungs-Form kann nun die Geradengleichung aufgestellt werden:
 $y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -1 \cdot (x + 2) \Rightarrow y = -x - 2$ ist die Tangentengleichung

Prüfung, ob die Tangente das Schaubild von f bei $x = 4$ berührt:

Zunächst wird geprüft ob der Schaubildpunkt $P(4/f(4)) = P(4/-6)$ auf der Tangente liegt:
Einsetzen der Koordinaten von P in die Tangentengleichung: $-6 = -4 - 2$ liefert eine wahre Aussage, somit liegt der Punkt P auch auf der Tangente.
Damit eine Berührung existiert, muss die Steigung an der Stelle $x = 4$ der Tangentensteigung entsprechen.

Es gilt $f'(4) = -1 = m_{\text{Tangente}}$.

Somit ist auch diese Bedingung erfüllt und die Berührung bei $x = 4$ gezeigt.

1.3

Der neue Funktionsterm lautet $f(x) = \frac{1}{32}x^4 - ax^3 - \frac{3}{8}x^2$.

Begründung, weshalb Schaubild a) kein Schaubild von f sein kann:

Für $x \rightarrow \infty$ strebt $f(x) \rightarrow \infty$, da der höchste Grad $\frac{1}{32}x^4 \rightarrow \infty$ strebt.

Für das Schaubild a) gilt jedoch: Für $x \rightarrow \infty$ strebt $f(x) \rightarrow -\infty$, damit kann a) nicht richtig sein.

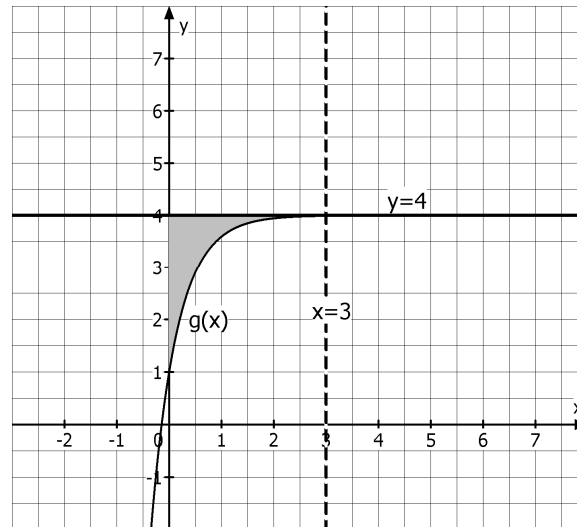
Begründung, weshalb Schaubild b) kein Schaubild von f sein kann:

Das Schaubild von f geht auch nach der Änderung des Koeffizienten durch den Ursprung $O(0/0)$, da $f(0) = 0$ gilt.

Da das Schaubild b) nicht durch den Ursprung verläuft, kann b) nicht richtig sein.

1.4

Skizze:



Berechnung der Fläche:

$$A = \int_0^3 (4 - g(x)) dx = \int_0^3 (4 - (4 - 3e^{-2x})) dx = \int_0^3 (3e^{-2x}) dx = \left[-\frac{3}{2} e^{-2x} \right]_0^3 = -\frac{3}{2} e^{-6} + \frac{3}{2} \approx 1,496 \text{ FE}$$

1.5

Es ist $h(x) = a - b e^{cx}$ mit $h'(x) = -b \cdot c \cdot e^{cx}$ und $h''(x) = -b \cdot c^2 \cdot e^{cx}$

Das Schaubild von h soll durch $O(0/0)$ verlaufen.

Daher gilt die Bedingung $h(0) = 0 \Rightarrow a - b \cdot e^0 = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$ was zu zeigen war.

Mit $h'(0) = -b \cdot c$ und $h''(0) = -b \cdot c^2$ folgt aus der Bedingung $h'(0) = h''(0)$:

$$-b \cdot c = -b \cdot c^2 \quad | : (-b \cdot c) \quad (\text{da } b, c \neq 0 \text{ ist, ist diese Division erlaubt})$$

$$\Rightarrow 1 = c \text{ was auch zu zeigen war.}$$

Nun soll ein beliebiger Punkt festgelegt werden, der auf dem Schaubild von h liegen soll.
Der Punkt sei $Q(1/2)$.

Berechnung von a , so dass Q auf dem Schaubild liegt:

$$\text{Bedingung: } h(1) = 2 \Rightarrow a - a \cdot e = 2 \Rightarrow a \cdot (1 - e) = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{1 - e}$$