

Hauptprüfung 2010 Aufgabe 2

2.1

Vervollständigen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Eine Polynomfunktion 4. Grades hat höchstens _____ Extremstellen, denn ihre Ableitung vom Grad _____.

- b) Die Funktion f_1 mit $f_1(x) = x + e^x$ ist monoton _____, denn ihre Ableitung ist stets _____.

- c) Die Funktion f_2 mit $f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ hat im Intervall $[0;12]$ _____ Nullstellen und diese Funktion hat die Periode _____.

- d) Das Schaubild der Funktion f_3 mit $f_3(x) = 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ entsteht aus dem Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ durch Streckung um den Faktor _____ in y-Richtung und durch Verschiebung um _____ nach _____.

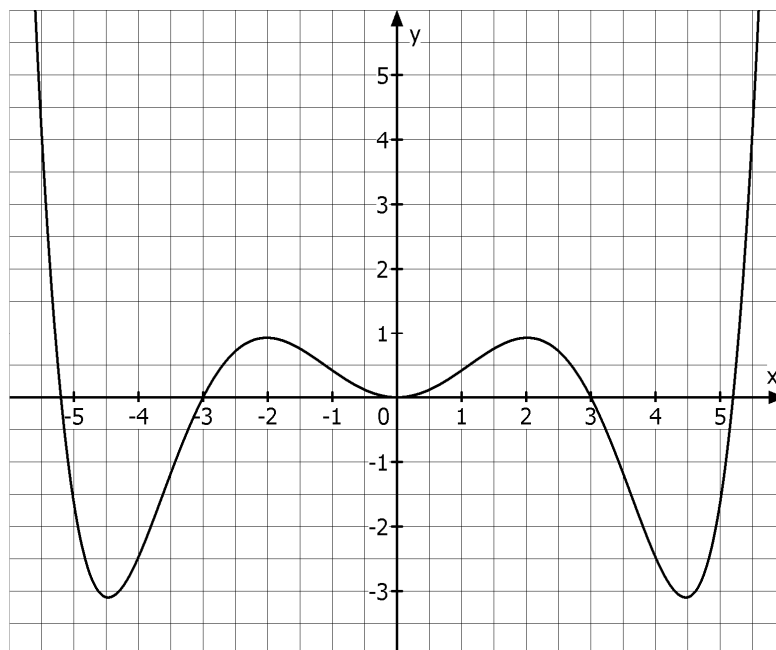
(8 Punkte)

2.2

Gegeben ist das Schaubild einer Funktion.

Skizzieren Sie das Schaubild ihrer Ableitungsfunktion in das untenstehende Koordinatensystem.

(6 Punkte)



Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = e^x$ und g mit $g(x) = \sin(x) + 1$ für $x \in \mathbb{R}$.
Ihre Schaubilder sind K_f und K_g .

2.3

Begründen Sie folgende Aussagen:

- a) K_f und K_g berühren sich auf der y -Achse.
- b) K_f und K_g haben für $x < 0$ unendlich viele Schnittpunkte. (6 Punkte)

2.4

Eine Tangente an K_f geht durch den Ursprung. Berechnen Sie die Gleichung dieser Tangente. (4 Punkte)

2.5

K_g und die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{4}{\pi}x$ schneiden sich in $P(\frac{\pi}{2}/2)$.

K_g und die x -Achse schließen eine Fläche ein, die von dieser Geraden geteilt wird.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der kleineren Teilfläche. Geben Sie das Ergebnis als Vielfaches von π an.

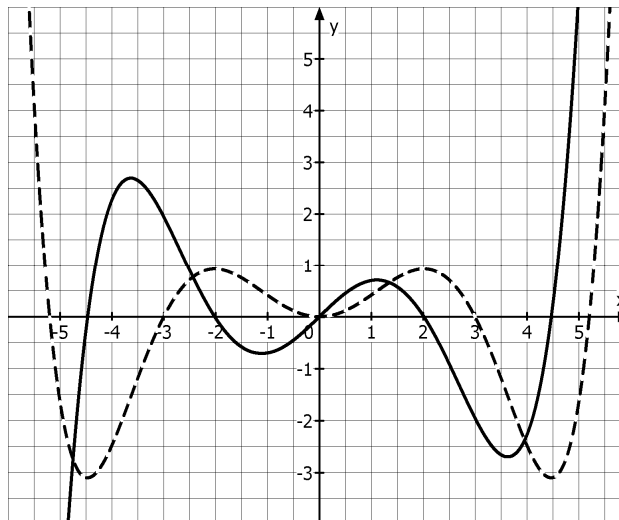
(6 Punkte)

Lösung Hauptprüfung 2010 Aufgabe 2

2.1

- a) Eine Polynomfunktion 4. Grades hat höchstens 3 Extremstellen, denn ihre Ableitung vom Grad 3.
- b) Die Funktion f_1 mit $f_1(x) = x + e^x$ ist monoton wachsend.
denn ihre Ableitung ist stets positiv. (es gilt $f_1'(x) = 1 + e^x > 0$)
- c) Die Funktion f_2 mit $f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ hat im Intervall $[0;12]$ 6 Nullstellen und
diese Funktion hat die Periode 4. ($p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$)
- d) Das Schaubild der Funktion f_3 mit $f_3(x) = 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ entsteht aus dem Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ durch Streckung um den Faktor 2 in y-Richtung und durch Verschiebung um $\frac{\pi}{3}$ nach links.

2.2



Die Ableitungsfunktion ist als fette Kurve eingezeichnet.

2.3

- a) Eine Berührung auf der y-Achse liegt vor, wenn $f(0) = g(0)$ und $f'(0) = g'(0)$ gilt.
Mit $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $g(x) = \sin(x) + 1$ und $g'(x) = \cos(x)$ folgt:
 $f(0) = 1 = g(0)$ und $f'(0) = 1 = g'(0)$.
Damit ist die Berührung gezeigt.
- b) Für $x < 0$ nimmt das Schaubild von $f(x) = e^x$ Werte an im Intervall $[0;1]$.

Für $x < 0$ bewegt sich das Schaubild von $g(x) = \sin(x) + 1$ periodisch im Wertebereich von $[0;2]$. Da es unendlich viele periodische Schwingungen gibt und innerhalb einer Periode der komplette Wertebereich $[0;2]$ von $g(x)$ erreicht wird, wird bei jeder Schwingung das Schaubild von $f(x)$ zweimal geschnitten (einmal bei der Aufwärts- und einmal bei der Abwärtsbewegung). Somit kommt es zu unendlich vielen Schnittpunkten für $x < 0$.

2.4

Gesucht ist die Gleichung einer Tangente an das Schaubild von $f(x) = e^x$, die durch den Ursprung verläuft.

Der allgemeine unbekannte Berührungspunkt der Tangente an das Schaubild von f habe die Koordinaten $B(u/f(u))$.

Die Steigung der Tangente in B beträgt $f'(u) = e^u$.

Nun wird eine allgemeine Tangentengleichung im Punkt B aufgestellt:

Aus der Punkt-Steigungs-Form folgt: $y - f(u) = f'(u) \cdot (x - u)$

Einsetzen der Funktionsterme: $y - e^u = e^u \cdot (x - u)$ (allgemeine Tangentengleichung)

Da die Tangente durch $O(0/0)$ gehen soll, werden die Koordinaten des Ursprungs nun für x bzw. y eingesetzt:

$$0 - e^u = e^u \cdot (0 - u)$$

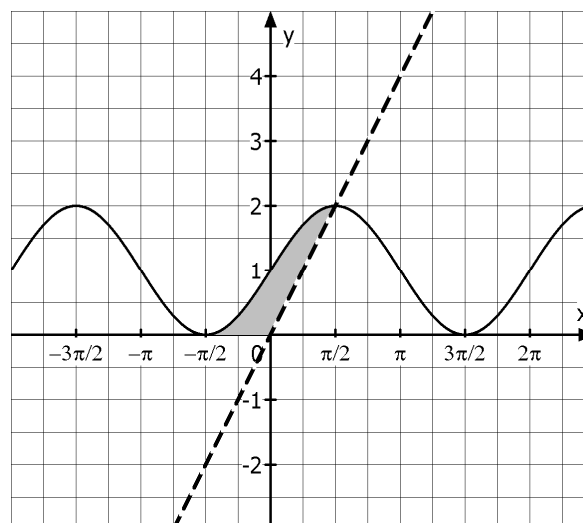
$$\Rightarrow -e^u = -u \cdot e^u \Leftrightarrow u \cdot e^u - e^u = 0 \Leftrightarrow e^u \cdot (u - 1) = 0$$

Als Lösung der Gleichung ergibt sich $u = 1$.

Der Berührungspunkt lautet daher $B(1/f(1)) = B(1/e)$.

Die Tangentengleichung lautet $y - e^1 = e^1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = e \cdot x$
(einsetzen von $u = 1$ in die allgemeine Tangentengleichung)

2.5



Berechnung der kleineren grauen Teilfläche:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (g(x)) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(g(x) - \frac{4}{\pi} x \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\sin(x) + 1) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(x) + 1 - \frac{4}{\pi} x \right) dx \\
 &= \left[-\cos(x) + x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \left[-\cos(x) + x - \frac{2}{\pi} x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos(0) - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} - (-\cos(0)) \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$