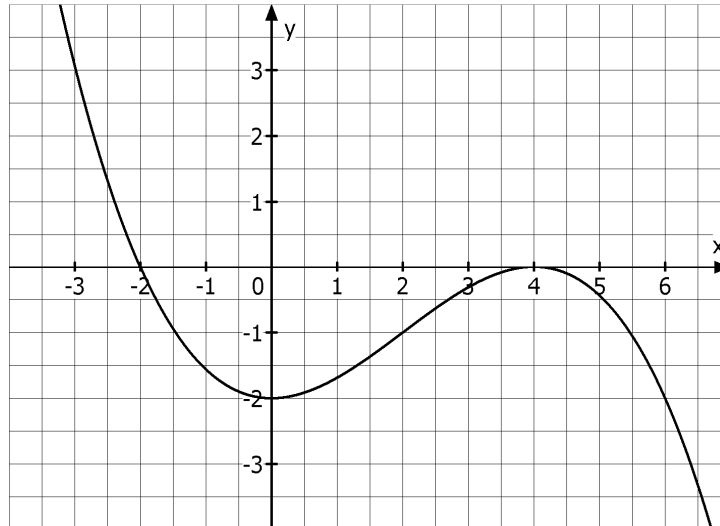


Hauptprüfung 2010 Aufgabe 3

Die Abbildung zeigt das Schaubild K_f einer Polynomfunktion f .



3.1

Bestimmen Sie die Gleichung einer Polynomfunktion f , deren Schaubild mit der dargestellten Kurve K_f übereinstimmt. (5 Punkte)

3.2

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

- a) $f(-2) < 0$ b) $f'(-2) < 0$ c) $f''(-2) < 0$ (5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von g ist K_g .

3.3

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Schaubildern K_f und K_g ? (2 Punkte)

Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ mit $x \in [-6; 6]$.

Das Schaubild von h ist K_h .

3.4

Untersuchen Sie K_h auf Symmetrie.

Bestimmen Sie die Periode von h .

Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K_h mit der x -Achse sowie die Koordinaten der Extrempunkte an. (7 Punkte)

3.5

Die Gerade $y = -2$ schließt mit K_h eine Fläche ein. Bestimmen Sie deren Inhalt mit Hilfe einer Stammfunktion. (5 Punkte)

3.6

Die Gerade $x = u$ mit $-2 \leq u \leq 1$ schneidet die beiden Schaubilder K_g und K_h in den Punkten P und Q. Für welchen Wert von u ist der Abstand der Punkte P und Q maximal ?

(6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2010 Aufgabe 3

3.1

Das Schaubild schneidet die x-Achse bei $x = -2$ (einfache Nullstelle) und bei $x = 4$ (doppelte Nullstelle, da dort ein Hochpunkt ist).

Der Ansatz für die Funktionsgleichung lautet $f(x) = a \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)^2$ (Linearfaktorzerlegung)

Der Punkt $P(0/-2)$ liegt auf dem Schaubild.

Einsetzen von P in die Funktionsgleichung: $f(0) = -2 \Rightarrow 32a = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{16}$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = -\frac{1}{16} \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)^2$

3.2

a) $f(-2) < 0$ ist falsch, da das Schaubild von f an der Stelle $x = -2$ die x-Achse schneidet.
Es gilt $f(-2) = 0$

b) $f'(-2) < 0$ ist wahr, da die Steigung der Tangente, die das Schaubild von f an der Stelle $x = -2$ berührt, negativ ist.

c) $f''(-2) < 0$ ist falsch, da das Schaubild von f an der Stelle $x = -2$ linksgekrümmt ist.
Es gilt $f''(-2) > 0$.

3.3

Ausmultiplizieren der Funktionsgleichung von f(x):

$$f(x) = -\frac{1}{16} \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)^2 = -\frac{1}{16} \cdot (x + 2) \cdot (x^2 - 8x + 16) = -\frac{1}{16} \cdot (x^3 - 6x^2 + 32) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - 2$$

Es gilt $f(x) = -g(x)$.

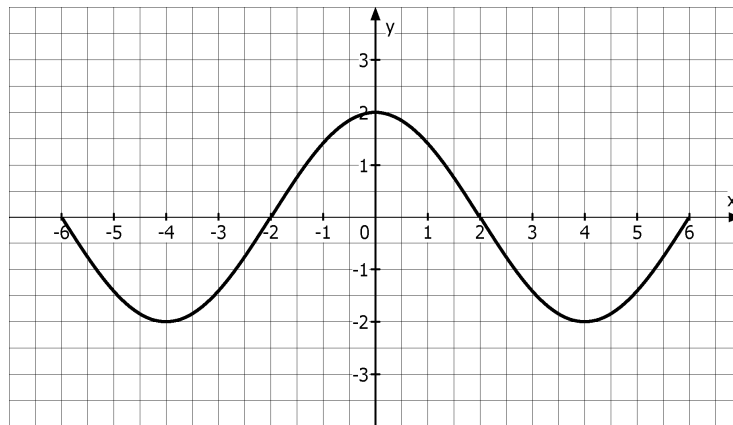
Anschaulich bedeutet dies, dass das Schaubild K_g durch Spiegelung an der x-Achse von K_f hervorgeht.

3.4

Das Schaubild von $h(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ ist symmetrisch zur y-Achse.

Begründung: Die Funktion $y = \cos(x)$ ist auch symmetrisch zur y-Achse und die durchgeführte Streckung in y-Richtung mit Faktor 2 und die Änderung der Periode haben keine Auswirkung auf die Symmetrieeigenschaft.

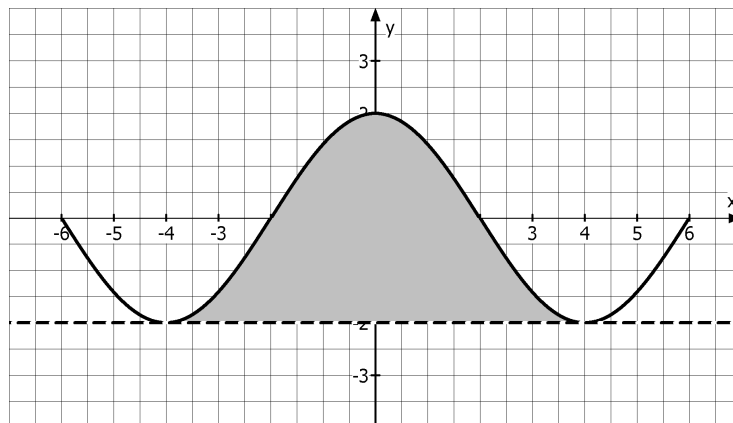
Die Periode des Schaubildes von h beträgt $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$.



Anhand des Schaubildes lauten die Schnittpunkte mit der x-Achse $N_1(-6/0)$, $N_2(-2/0)$, $N_3(2/0)$ und $N_4(6/0)$.

Die Extrempunkte lauten $T_1(-4/-2)$, $H(0/2)$, $T_2(4/-2)$.

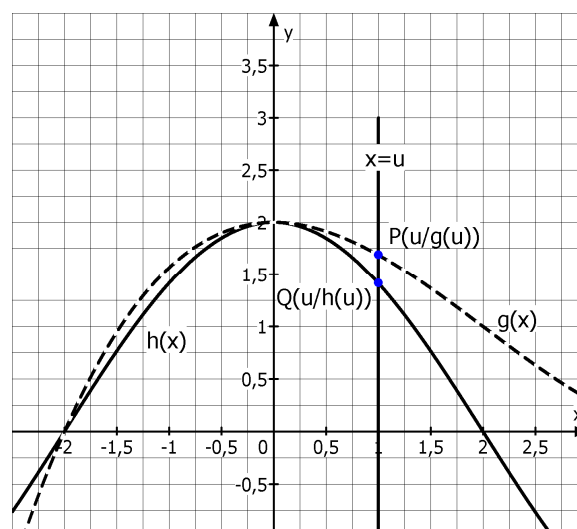
3.5



Berechnung der Fläche:

$$A = \int_{-4}^4 \left(2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - (-2) \right) dx = \left[2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \cdot \frac{4}{\pi} + 2x \right]_{-4}^4 = 2 \cdot \sin \pi \cdot \frac{4}{\pi} + 8 - \left(2 \cdot \sin(-\pi) \cdot \frac{4}{\pi} - 8 \right) = 16$$

3.6



Die Gerade $x = u$ schneidet das Schaubild von $g(x)$ in $P(u/g(u))$ und das Schaubild von $h(x)$ in $Q(u/h(u))$.

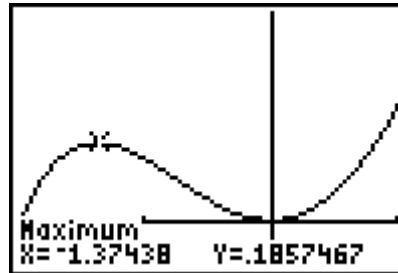
Für die Strecke $\overline{PQ}$ gilt: $\overline{PQ} = g(u) - h(u) = \frac{1}{16}u^3 - \frac{3}{8}u^2 + 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}u\right)$ mit $-2 \leq u \leq 1$

Gesucht ist der Wert von u , für die diese Funktion maximal wird.

Ermittlung des Maximums mit dem GTR:

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=1/16*X^3-3/8
Y2=X^2+2-2*cos(pi/4
Y3=
Y4=
Y5=
    
```



Die Funktion besitzt im Intervall $-2 \leq u \leq 1$ ein lokales Maximum bei $u = -1,374$ mit dem Wert $y = 0,1857$.

Am rechten Rand des Intervalls bei $u = 1$ nimmt die Funktion jedoch einen höheren Wert $y = 0,273$ an.

Somit ist der Abstand der beiden Punkte für $u = 1$ maximal mit dem maximalen Abstand von $0,273$ Längeneinheiten.