

Hauptprüfung 2010 Aufgabe 4

Gegeben sind die Punkte $A(5/4/1)$, $B(1/4/1)$, $C(1/0/1)$ und $S(3/2/5)$.

4.1

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenkelig ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.
Beschreiben Sie die besondere Lage des Quadrats im Koordinatensystem.

Zeichnen Sie das Quadrat ABCD und den Punkt S in ein räumliches Koordinatensystem
(x_2 - und x_3 -Achse mit 1 LE = 1cm; x_1 -Achse mit dem Schrägwinkel 45° und

1 LE = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm).

(10 Punkte)

4.2

Das Quadrat ABCD bildet mit dem Punkt S eine senkrechte Pyramide.

Vervollständigen Sie Ihre Zeichnung aus 4.1 zur Pyramide.

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Geben Sie die Koordinaten eines Punktes S^* mit negativem x_3 -Wert an, so dass das

Volumen der Pyramide 64 VE beträgt.

(5 Punkte)

4.3

Geben Sie jeweils eine Gleichung für die Gerade durch die Punkte B und S und die Gerade durch C und S an.

Überprüfen Sie für jede der beiden Geraden, ob der Punkt $E(7/-2/13)$ auf den Geraden liegt.

Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden.

(11 Punkte)

4.4

Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$ schneidet die $x_1 - x_3$ -Ebene im Punkt T,

die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ schneidet die $x_2 - x_3$ -Ebene im Punkt U.

Wie weit sind diese beiden Punkte voneinander entfernt ?

(4 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2010 Aufgabe 4

4.1

Nachweis Gleichschenkligkeit:

Zur Prüfung der Gleichschenkligkeit werden die Längen der Dreiecksseiten ermittelt.

Mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2} = 4$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{32}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4$$

Da $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ gilt, ist das Dreieck ABC gleichschenkl.

Nachweis Rechtwinkligkeit:

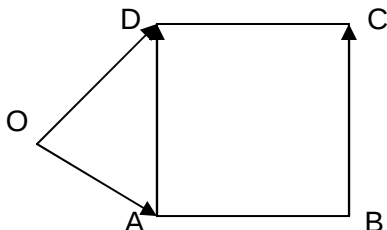
Da der rechte Winkel immer gegenüber der längsten Dreiecksseite liegt, kann dieser nur im Punkt B (also Winkel β) sein.

Kontrolle mit dem Satz des Pythagoras: Es gilt $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2$, da $4^2 + 4^2 = \sqrt{32}^2$ ist. Aufgrund der Gültigkeit dieses Satzes muss das Dreieck ABC rechtwinklig sein.

Oder: Kontrolle mit dem Skalarprodukt: Es gilt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Da das Skalarprodukt 0 ergibt, stehen die beiden Vektoren senkrecht aufeinander, deshalb besitzt das Dreieck ABC im Punkt B einen rechten Winkel.

Berechnung von D:

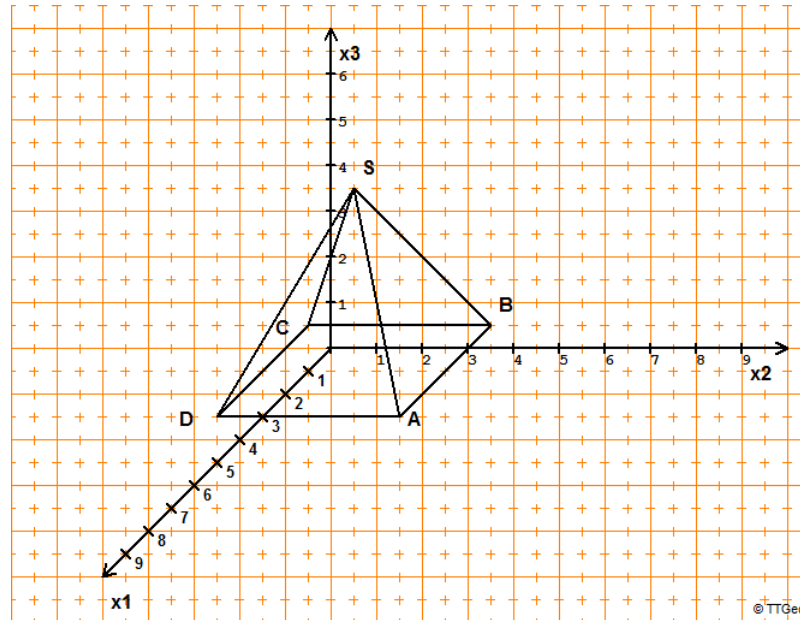


Es wird der Ortsvektor $\overrightarrow{OD}$ des Punktes D bestimmt: (es gilt $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$)

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Die Koordinaten von D sind } D(5/0/1).$$

Besondere Lage des Quadrats:

Alle x_3 -Werte von ABCD sind 1. Damit liegt das Quadrat parallel zur $x_1 - x_2$ -Ebene im Abstand von 1.



4.2

Die Vervollständigung zur Pyramide wurde bereits in der Zeichnung in 4.1 berücksichtigt.

Berechnung des Pyramidenvolumens:

Es gilt $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$G = \text{Grundfläche der Pyramide} = A_{\text{Quadrat}} = \overline{AB}^2 = 16$

$h = \text{Höhe der Pyramide} = \text{Abstand des Punktes S von dem Quadrat ABCD} = 5 - 1 = 4$
 (Da das Quadrat auf der Höhe 1 liegt und der Punkt S den x_3 -Wert 5 besitzt, ergibt sich die Pyramidenhöhe als Differenz dieser beiden Werte)

$\Rightarrow V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 4 = \frac{64}{3} \text{ Volumeneinheiten}$

Berechnung Punkt S*

Mit dem vorgegebenen Pyramidenvolumen lässt sich die Höhe h^* der Pyramide berechnen:

$64 = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot h^* \Rightarrow h^* = \frac{64 \cdot 3}{16} = 12 \text{ Längeneinheiten}$

Der Punkt S* muss somit einen Abstand von 12 Längeneinheiten von der Grundfläche ABCD besitzen.

Da $x_3 < 0$ sein soll, ergibt sich als x_3 -Wert -11.

Die Wahl der anderen beiden Koordinaten von S^* spielt keine Rolle.
Es gilt $S^*(x_1/x_2/-11)$, also zum Beispiel $S^*(3/2/-11)$.

4.3

Gerade g durch B und S: $\vec{x} = \vec{OB} + s \cdot \vec{BS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gerade h durch C und S: $\vec{x} = \vec{OC} + t \cdot \vec{CS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Kontrolle, ob Punkt E auf g liegt:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aus der 1. Zeile: $7 = 1 + 2s \Rightarrow s = 3$

Aus der 2. Zeile: $-2 = 4 - 2s \Rightarrow s = 3$

Aus der 3. Zeile: $13 = 1 + 4s \Rightarrow s = 3$

Da alle drei Werte für s identisch sind, liegt E auf g.

Kontrolle, ob Punkt E auf h liegt:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aus der 1. Zeile: $7 = 1 + 2t \Rightarrow t = 3$

Aus der 2. Zeile: $-2 = 2t \Rightarrow t = -1$

Wegen der unterschiedlichen Werte für t liegt E nicht auf der Geraden h.

Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{4 - 4 + 16}{\sqrt{4 + 4 + 16} \cdot \sqrt{4 + 4 + 16}} = \frac{16}{24} \Rightarrow \alpha = 48,2^\circ$$

4.4

Berechnung des Punktes T:

Der Schnittpunkt T mit der $x_1 - x_3$ -Ebene besitzt die Koordinaten $T(x_1/0/x_3)$

$$\text{Punktprobe ergibt: } \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aus der 2.Zeile folgt: $0 = 8 - s \Rightarrow s = 8$

Daraus folgt $x_1 = -3 + 8 = 5$ und $x_3 = -7 + 16 = 9$

Koordinaten von T(5/0/9)

Berechnung des Punktes U:

Der Schnittpunkt U mit der $x_2 - x_3$ -Ebene besitzt die Koordinaten $U(0/x_2/x_3)$

$$\text{Punktprobe ergibt: } \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aus der 1.Zeile folgt: $0 = -3 + t \Rightarrow t = 3$

Daraus folgt $x_2 = -4 + 3 = -1$ und $x_3 = -7 + 6 = -1$

Koordinaten von U(0/-1/-1)

Abstand T von U:

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{UT} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Daraus folgt } |\overrightarrow{UT}| = \sqrt{25 + 1 + 100} = \sqrt{126}.$$