

Hauptprüfung 2010 Aufgabe 5

5.1

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & -8x_2 & +6x_3 & = & 14 \\ -2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & = & -14 \end{array}$$

Ermitteln Sie den allgemeinen Lösungsvektor.

Geben Sie die vier Lösungsvektoren an, bei denen alle Komponenten positiv und ganzzahlig sind.

(6 Punkte)

5.2

Für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ gilt: $A \cdot B = B \cdot A$.

Bestimmen Sie die Werte von x und y .

(6 Punkte)

5.3

In einer Großkonditorei werden drei verschiedene Torten gebacken.

Dafür werden aus den vier Zutaten Ei, Mehl, Butter, Zucker zwei verschiedene Teige und zwei verschiedene Cremes hergestellt.

Den Materialbedarf in Mengeneinheiten (ME) zeigen folgende Tabellen:

(Bei den Torten ist 1 ME dasselbe wie 1 Torte).

	Teig 1	Teig 2	Creme 1	Creme 2
Ei	3	2	4	3
Mehl	2	3	1	1
Butter	1	2	3	5
Zucker	3	2	4	4

	Torte 1	Torte 2	Torte 3
Ei	19	18	19
Mehl	10	10	9
Butter	15	17	19
Zucker	20	20	21

5.3.1

Von jeder Torte sollen 100 Stück produziert werden.

Welche Mengen an Zutaten werden dafür benötigt ?

Wie viele Mengeneinheiten von Teigen und Cremes werden dafür verwendet ?

(8 Punkte)

5.3.2

Erstellen Sie eine Tabelle, die den Bedarf an Teigen und Cremes für jede der drei Tortenarten zeigt.

Die Großkonditorei kalkuliert mit folgenden Kosten (in Geldeinheiten GE):

$\vec{k}_R = (0,1 \quad 0,2 \quad 0,6 \quad 0,3)$ Kosten für je eine ME der Zutaten

$\vec{k}_Z = (0,8 \quad 1,0 \quad 0,6 \quad 0,7)$ Fertigungskosten je ME Teig/Creme

$\vec{k}_E = (3 \quad 5 \quad 7)$ Fertigungskosten je Torte

Wie hoch sind die variablen Kosten, wenn von jeder Sorte 100 Torten produziert werden ?
Welche variablen Kosten entfallen auf jede dieser Torten durchschnittlich ?

(10 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2010 Aufgabe 5

5.1

Zunächst wird das Gleichungssystem auf Stufenform gebracht:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & -8 & 6 & 14 \\ -2 & 3 & -4 & -14 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} | \cdot (-3) \quad \leftarrow \quad | \cdot 2 \\ \leftarrow \quad \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

Aus der 3. Zeile und der 2. Zeile folgt: $x_2 = 2$

In der 1. Zeile sind nun 2 Variable enthalten, so dass eine Variable mit Hilfe eines Parameters t ausgedrückt werden muss.

Es sei $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$

Daraus folgt aus der 1. Zeile: $x_1 - 3 \cdot 2 + 2t = 4 \Rightarrow x_1 = 10 - 2t$

Der allgemeine Lösungsvektor lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 - 2t \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ □

Damit alle Komponenten ganzzahlig und positiv sind, können folgende t -Werte eingesetzt werden:

$$t = 1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t = 2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad t = 3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad t = 4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5.2

Es gilt $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+10 & y+12 \\ 3x+20 & 3y+24 \end{pmatrix}$ und

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} x & y \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ 23 & 34 \end{pmatrix}$$

Ein Vergleich der Matrizeneinträge ergibt:

$$3x + 20 = 23 \Rightarrow x = 1$$

$$3y + 24 = 34 \Rightarrow y = \frac{10}{3}$$

$$x + 10 = x + 3y \Rightarrow y = \frac{10}{3} \quad (\text{stimmt mit der bereits ermittelten Lösung überein})$$

$$y + 12 = 2x + 4y \Rightarrow \frac{10}{3} + 12 = 2 + 4 \cdot \frac{10}{3} \quad (\text{wahre Aussage})$$

Damit ist $x = 1$ und $y = \frac{10}{3}$

5.3.1

Auf Basis der dargestellten Tabellen können folgende Matrizen aufgestellt werden:

$$\text{Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix: } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rohstoff-Endprodukt-Matrix: } C = \begin{pmatrix} 19 & 18 & 19 \\ 10 & 10 & 9 \\ 15 & 17 & 19 \\ 20 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

Der Produktionsvektor lautet $\vec{p} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$, da von jeder Torte 100 Stück produziert werden sollen.

$$\text{Die Menge an Zutaten (=Rohstoffe) berechnen sich mit } C \cdot \vec{p} = \vec{r} = \begin{pmatrix} 5600 \\ 2900 \\ 5100 \\ 6100 \end{pmatrix}$$

Für die Zutaten werden 5600 ME Ei, 2900 ME Mehl, 5100 ME Butter und 6100 ME Zucker benötigt.

Die Mengeneinheiten $\vec{z}$ für Teige und Cremes (=Zwischenprodukte) berechnen sich mit $A \cdot \vec{z} = \vec{r} \Rightarrow \vec{z} = A^{-1} \cdot \vec{r}$

$$\text{Mit dem GTR ergibt sich } \vec{z} = A^{-1} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 500 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

Für die Torten werden 500 ME von Teig 1, 300 ME von Teig 2, 500 ME von Creme 1 und 500 ME von Creme 2 verwendet.

5.3.2

Die Tabelle, in welcher der Bedarf der Teige und Cremes (=Zwischenprodukte) je Tortenart aufgeführt ist, ergibt sich aus der Matrix B.

$$\text{Es gilt } A \cdot B = C \Rightarrow B = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{mit GTR})$$

Die Matrixeinträge sind nun folgendermaßen zu interpretieren:

	Torte 1	Torte 2	Torte 3
Teig 1	2	2	1
Teig 2	1	1	1
Creme 1	2	1	2
Creme 2	1	2	2

Zur Herstellung von 1 ME der Torte 1 benötigt man beispielsweise 2 ME von Teig 1, 1 ME von Teig 2, 2 ME von Creme 2 und 1 ME von Creme 1.

Für die variablen Kosten gilt:

$$\vec{k}_V = \vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_Z \cdot B + \vec{k}_E = (26,40 \quad 29,60 \quad 32,80)$$

Die dargestellten Werte geben die Produktionskosten von je 1 ME der Torten 1, 2 und 3 an.

Bei Herstellung von 100 Torten jeder Sorte ergeben sich Kosten in der Höhe von
 $100 \cdot 26,40 + 100 \cdot 29,60 + 100 \cdot 32,80 = 8880$ Geldeinheiten.

Auf jede der 300 Torten entfallen durchschnittlich $8880 : 300 = 29,60$ Geldeinheiten an Kosten.