

Hauptprüfung 2010 Aufgabe 7

Die Firma Holz KG stellt Fertigparkettquadrate her. Die Gesamtkosten hängen von der Produktionsmenge ab und werden durch eine Polynomfunktion 3. Grades beschrieben. Die Produktionsmengen werden in Mengeneinheiten (ME), die Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE) angegeben.

7.1

Ermitteln Sie mit nachfolgenden Informationen die Kostenfunktion:

Bei einer Produktionsmenge von 4 ME betragen die Gesamtkosten 24,5 GE und die Grenzkosten 3 GE pro ME. Die variablen Stückkosten sind bei dieser Ausbringungsmenge minimal. Bei einer Produktion von 10 ME entstehen Stückkosten in Höhe von 13,25 GE je ME.

(7 Punkte)

Nach geänderten Produktionsverfahren sind die Gesamtkostenfunktion K und die Erlösfunktion E gegeben durch

$$K(x) = 0,25x^3 - 2x^2 + 6x + 12,5 \quad \text{und} \quad E(x) = 9,25x.$$

7.2

Berechnen Sie die Nutzenschwelle und die Nutzengrenze.

(4 Punkte)

7.3

Bei welcher Produktionsmenge ist der Stückgewinn maximal ?
Geben sie den maximalen Stückgewinn an.

(4 Punkte)

7.4

Nach einer Senkung der Fixkosten liegt die Nutzengrenze bei 9 ME.
Um wie viel GE wurden die Fixkosten gesenkt ?

(4 Punkte)

Die Fertigparkettquadrate haben eine Soll-Kantenlänge von 200 mm. Die Qualität der Produktion wird laufend überprüft.

In der **Produktionsperiode 1** ergibt sich folgende Häufigkeitsverteilung:

Katenlänge in mm	198-199	199-200	200-201	201-202	202-203
Anzahl	159	1020	1393	396	32

Teile mit Kantenlängen von genau 199, 200, 201, 202 mm gehören jeweils zur linken Spalte der Tabelle

In der **Produktionsperiode 2** wird die Sägemaschine nach Kundenreklamationen neu eingestellt. Es ergibt sich eine durchschnittliche Kantenlänge von $\mu = 200,2$ mm bei einer Standardabweichung von $\sigma = 0,45$ mm.

7.5

Bestimmen Sie unter Verwendung der Klassenmitten die durchschnittliche Kantenlänge und die Standardabweichung für die Produktionsperiode 1. Kann die Neueinstellung in Produktionsperiode 2 als erfolgreich bezeichnet werden ? Begründen Sie Ihre Antwort.

(7 Punkte)

7.6

Wie viel Prozent der Fertigparkettquadrate in Produktionsperiode 2 haben eine Kantenlänge zwischen 199,5 mm und 201 mm, wenn die Kantenlänge normalverteilt ist ?

(4 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2010 Aufgabe 7

7.1

Ansatz für die Kostenfunktion: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Grenzkosten: $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Stückkosten: $k(x) = \frac{K(x)}{x} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$

Variable Stückkosten: $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = ax^2 + bx + c$ mit $k'_v(x) = 2ax + b$

Es gelten folgende Bedingungen:

$$K(4) = 24,5 \Rightarrow 64a + 16b + 4c + d = 24,5$$

$$K'(4) = 3 \Rightarrow 48a + 8b + c = 3$$

$$k'_v(4) = 0 \Rightarrow 8a + b = 0 \quad (\text{variable Stückkosten sind bei } x = 4 \text{ ME minimal})$$

$$k(10) = 13,25 \Rightarrow 100a + 10b + c + 0,1d = 13,25$$

Folgendes lineares Gleichungssystem ist zu lösen:

$$64a + 16b + 4c + d = 24,5$$

$$48a + 8b + c = 3$$

$$8a + b = 0$$

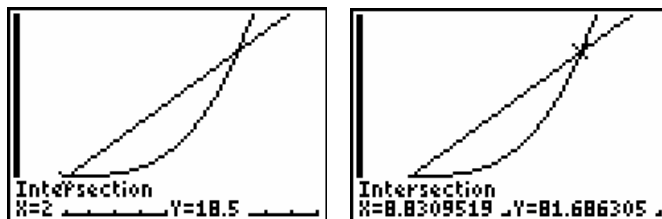
$$100a + 10b + c + 0,1d = 13,25$$

Mit dem GTR folgt: $a = 0,25$; $b = -2$; $c = 7$; $d = 12,5$

Die Kostenfunktion lautet $K(x) = 0,25x^3 - 2x^2 + 7x + 12,5$.

7.2

Die Nutzenschwelle und Nutzengrenze sind die Schnittpunkte der Kostenfunktion mit der Erlösfunktion:



Die linke Schnittstelle bei $x = 2$ ME entspricht der Nutzenschwelle.

Die rechte Schnittstelle bei $x = 8,83$ ME entspricht der Nutzengrenze.

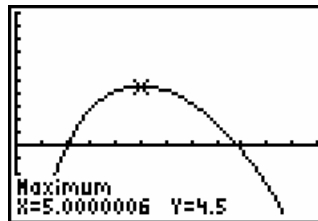
7.3

Die Gewinnfunktion lautet

$$G(x) = E(x) - K(x) = 9,25x - (0,25x^3 - 2x^2 + 6x + 12,5) = -0,25x^3 + 2x^2 + 3,25x - 12,5$$

Die Stückgewinnfunktion lautet $g(x) = \frac{G(x)}{x} = -0,25x^2 + 2x + 3,25 - \frac{12,5}{x}$

Das Maximum des Stückgewinns wird mit dem GTR ermittelt:



Der Stückgewinn wird maximal für $x = 5$ ME.

Der maximale Stückgewinn beträgt 4,5 GE pro ME.

7.4

Wenn die Nutzengrenze nun bei 9 ME liegt, schneiden sich die Erlösfunktion $E(x) = 9,25x$ und die neue Kostenfunktion $K(x) = 0,25x^3 - 2x^2 + 6x + C$ (mit unbekannten Fixkosten C) bei $x = 9$.

Folglich muss gelten: $E(9) = K(9)$.

Da $E(9) = 9,25 \cdot 9 = 83,25$ gilt, folgt daraus $K(9) = 74,25 + C = 83,25 \Rightarrow C = 9$

Die Fixkosten werden daher von bisher 12,5 GE auf 9 GE gesenkt.

7.5

Die Klassenmitten liegen bei 198,5 bzw. 199,5 bzw. 200,5 bzw. 201,5 bzw. 202,5.

Berechnung der durchschnittlichen Kantenlänge und der Standardabweichung mit dem GTR:

L1	L2	L3	1
198,5	159	-----	
199,5	1020		
200,5	1393		
201,5	396		
202,5	32		
-----	-----		
L1(1)=198.5			

1-Var Stats
$\bar{x} = 200.2073333$
$\Sigma x = 600622$
$\Sigma x^2 = 120250852$
$Sx = .8007662774$
$\sigma x = .8006328053$
$n = 3000$

Durchschnittliche Kantenlänge ist 200,2 mm

Standardabweichung $\sigma = 0,8$

Die Neueinstellung kann als erfolgreich bezeichnet werden, da aufgrund der geringeren Standardabweichung und des gleich bleibenden Mittelwertes die Streuung um die Soll-Kantenlänge geringer ist.

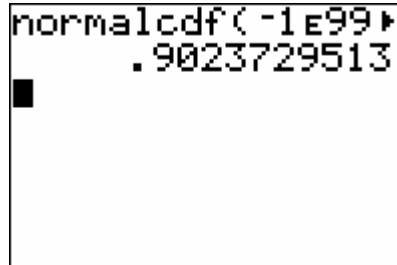
7.6

Die Kantenlänge sei X . X ist normalverteilt mit $\mu = 200,2$ und $\sigma = 0,45$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$P(199,5 \leq X \leq 201) = P(X \leq 201) - P(X \leq 199,5)$$

Berechnung mit dem GTR:



```
normalcdf(-1E99, 201)
.9023729513
```

Es gilt $P(199,5 \leq X \leq 201) \approx 0,902$

Ca. 90% der Fertigparkettquadrate liegen in dem angegebenen Intervall.