

Hauptprüfung 2009 Aufgabe 1

1.1

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat im Punkt $H(1/3)$ eine waagrechte Tangente. Die x-Koordinate des Wendepunktes beträgt 2. Die Tangente im Wendepunkt hat die Steigung -1,5. Bestimmen Sie den Funktionsterm.

(6 Punkte)

1.2

Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{3}{2}x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ihre Schaubilder sind K_f und K_g .

1.2.1

Welche gemeinsamen Punkte haben K_f und die x-Achse? Geben Sie die Hoch- und Tiefpunkte von K_f an. Stellen Sie den Funktionsterm $f(x)$ in Produktform dar.

Zeichnen Sie K_f und K_g .

(7 Punkte)

1.2.2

In welchem Punkt B berührt eine Parallele zu K_g das Schaubild K_f ?

Ermitteln Sie die Gleichung dieser Parallelen zu K_g .

(4 Punkte)

1.2.3

K_f und die x-Achse begrenzen eine Fläche A_1 . Ermitteln Sie den Flächeninhalt von A_1 .

Die Gerade mit der Gleichung $x = a$ mit $a < 0$, K_f und die x-Achse schließen eine Fläche A_2 ein. Bestimmen Sie a so, dass A_1 und A_2 denselben Flächeninhalt besitzen. (6 Punkte)

1.3

Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = \frac{1}{9} \cdot (1 - e^{2x})$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_h .

1.3.1

Zeigen Sie, dass K_h und K_f sich im Ursprung senkrecht schneiden.

(4 Punkte)

1.3.2

Um wie viel muss K_h nach oben verschoben werden, damit das verschobene Schaubild die x-Achse an der Stelle $x = 1$ schneidet?

(3 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2009 Aufgabe 1

1.1

Ansatz für eine ganzrationale Funktion 3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Da es sich um 4 Parameter a, b, c, d handelt, die gesucht werden, müssen 4 Bedingungen aufgestellt werden.

1.) Der Punkt H(1/3) liegt auf dem Schaubild: $f(1) = 3 \Rightarrow a + b + c + d = 3$

2.) Im Punkt H(1/3) ist die Steigung $m = 0$ (waagrechte Tangente): $f'(1) = 0$

Mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ folgt $3a + 2b + c = 0$

3.) An der Stelle $x = 2$ liegt ein Wendepunkt vor: $f''(2) = 0$

Mit $f''(x) = 6ax + 2b$ folgt $12a + 2b = 0$

4.) An der Stelle $x = 2$ beträgt die Steigung -1,5: $f'(2) = -1,5 \Rightarrow 12a + 4b + c = -1,5$

Nun ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 3 \\ 3a & + & 2b & + & c & & & = & 0 \\ 12a & + & 2b & & & & & = & 0 \\ 12a & + & 4b & + & c & & & = & -1,5 \end{array}$$

Lösung mit Hilfe des GTR:

MATRIX[A] 4 x5

[1]	1	1	1	1
[3]	3	2	1	0
[12]	12	2	0	0
[12]	12	4	1	-1,5

1,1=1

rref([A])

[1]	0	0	0	.5
[0]	1	0	0	-3
[0]	0	1	0	4,5
[0]	0	0	1	1

Daraus folgt $a = 0,5$; $b = -3$; $c = 4,5$; $d = 1$

Die gesuchte Funktion lautet $f(x) = 0,5x^3 - 3x^2 + 4,5x + 1$

1.2.1

Gemeinsame Punkte von K_f mit der x-Achse:

$$\text{Setze } f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x = 0 \quad | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$$

Daraus folgt $x_1 = 0$ oder $x_{2,3} = 3$.

(Hinweis: Mit dem GTR kann man die Schnittpunkte auch direkt bestimmen).

Gemeinsame Punkte: $N_1(0/0)$ und $N_{2,3}(3/0)$ (Berührungspunkt, da doppelte Nullstelle)

Die doppelte Nullstelle entspricht einem Extrempunkt des Schaubildes, wie sich bei der Berechnung der Hoch-/Tiefpunkte zeigen wird.

Hoch- und Tiefpunkte:

Ableitungen: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} \Rightarrow f''(x) = 3x - 6$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1,5 \cdot 4,5}}{3} = \frac{6 \pm 3}{3}$$

Daraus folgt $x_1 = 3$ und $x_2 = 1$.

Hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$

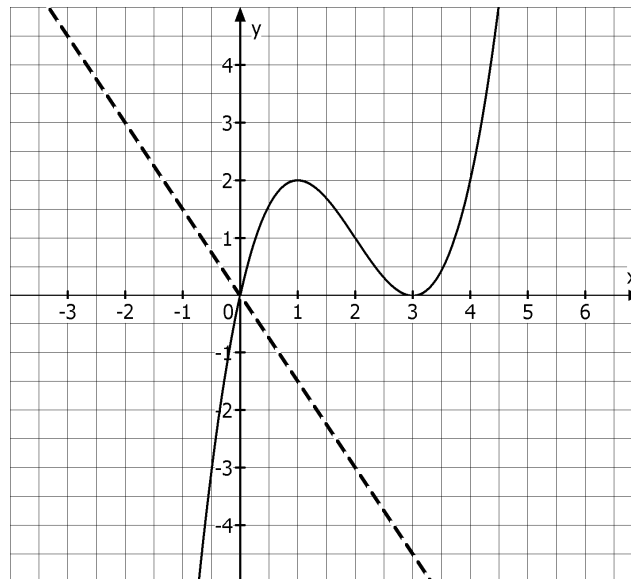
$$f''(3) = 3 > 0 \Rightarrow TP(3/f(3)) = TP(3/0) = N_{2,3}$$

$$f''(1) = -3 < 0 \Rightarrow HP(1/f(1)) = HP(1/2)$$

Produktform des Funktionsterms:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x = \frac{1}{2}x \cdot (x^2 - 6x + 9) = \frac{1}{2}x \cdot (x - 3)^2$$

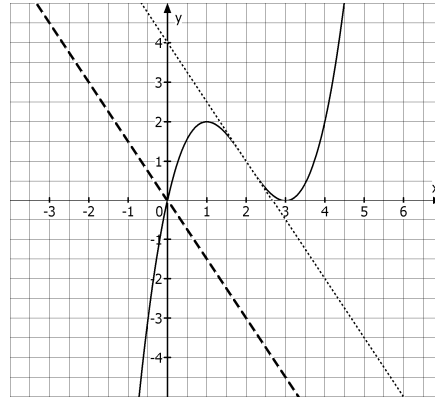
Zeichnung der Schaubilder K_f und K_g :



1.2.2

Gesucht ist eine Parallele zu K_g , die das Schaubild K_f berührt.

Die gesuchte Gerade entspricht der gepunkteten Linie in der nachfolgenden Skizze.



Die Parallele zu K_g ist eine Gerade mit der Steigung $m = -\frac{3}{2}$.

Gesucht ist eine Tangente an das Schaubild K_f , die die Steigung $m = -\frac{3}{2}$ besitzt.

Bedingung: $f'(x) = -\frac{3}{2}$

$$\frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1,5 \cdot 6}}{3} = \frac{6 \pm 0}{3} = 2$$

Der Berührungspunkt der Tangente an das Schaubild von f besitzt die Koordinaten $B(2/f(2)) = B(2/1)$.

Die gesuchte Gerade enthält den Punkt $B(2/1)$ und hat die Steigung $m = -\frac{3}{2}$.

Punkt-Steigungsform: $\frac{y-1}{x-2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 4$ und dies ist die gesuchte Parallele.

1.2.3

Berechnung von A_1 :

Anhand des Schaubildes aus Aufgabe 1.2.1 ergibt sich, dass die Fläche A_1 zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 3$ liegt.

$$A_1 = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x \right) dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2 \right]_0^3 = \frac{81}{8} - 27 + \frac{81}{4} - 0 = \frac{27}{8}$$

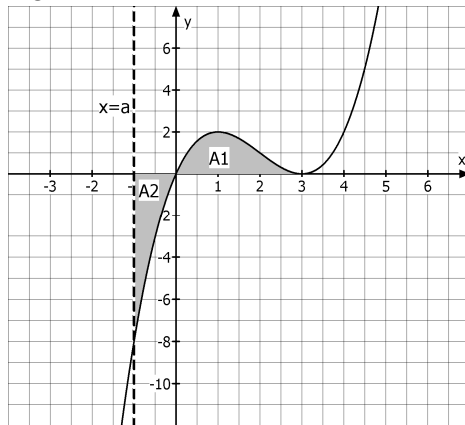
Hinweis: Die Fläche hätte man auch direkt mit dem GTR berechnen können.

Berechnung von a :

Die Grenze $x = a$ soll so bestimmt werden, dass $A_2 = A_1 = \frac{27}{8}$ gilt.

$$A_2 = -\int_a^0 f(x) dx = -\left[\frac{1}{8}x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2 \right]_a^0 = -\left(0 - \left(\frac{1}{8}a^4 - a^3 + \frac{9}{4}a^2 \right) \right) = \frac{1}{8}a^4 - a^3 + \frac{9}{4}a^2$$

Skizze:



Nun soll gelten:

$$\frac{1}{8}a^4 - a^3 + \frac{9}{4}a^2 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow a^4 - 8a^3 + 18a^2 - 27 = 0$$

Mit Hilfe des GTR ergibt sich die Lösung
 $a = -1$ oder $a = 3$.

Da $a < 0$ sein soll, ergibt sich als Lösung
 $a = -1$.

1.3.1

Nachweis, dass sich die Schaubilder von $f(x)$ und $h(x)$ im Ursprung senkrecht schneiden:

Folgende Bedingungen müssen gezeigt werden:

1.) $f(0) = h(0)$

Da $f(0) = h(0) = 0$ gilt, ist diese Bedingung erfüllt.

2.) $f'(0) \cdot h'(0) = -1$

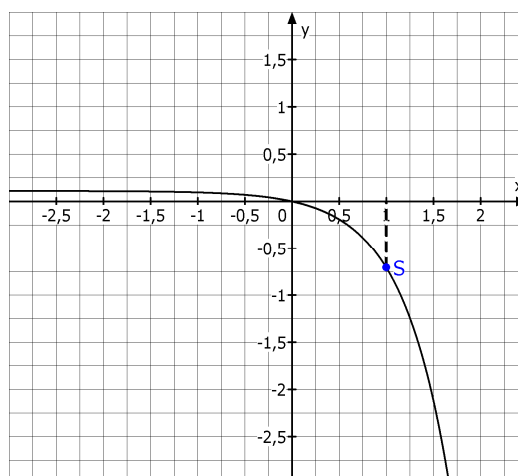
Es gilt $f'(0) = \frac{9}{2}$. Mit $h'(x) = \frac{1}{9} \cdot (-2) \cdot e^{2x}$ folgt $h'(0) = -\frac{2}{9}$.

Daraus folgt $f'(0) \cdot h'(0) = \frac{9}{2} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) = -1$

Damit ist der Nachweis erfolgt.

1.3.2

Skizze vom Schaubild von $h(x)$:



Berechnung der Verschiebung nach oben:

Es gilt $h(1) = \frac{1}{9}(1 - e^2) \approx -0,71$.

Daraus folgt $S(\frac{1}{9}(1 - e^2))$

Damit das Schaubild von h bei $x = 1$ die x -Achse schneidet, muss es um

$d = \left| \frac{1}{9}(1 - e^2) \right| = -\frac{1}{9}(1 - e^2) = \frac{1}{9}(e^2 - 1)$ verschoben werden.