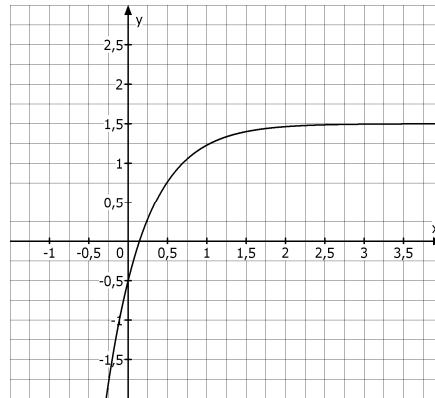


Hauptprüfung 2009 Aufgabe 2

2.1

Zu dem dargestellten Schaubild einer Exponentialfunktion gehört einer der folgenden

Funktionsterme: $g_1(x) = a - b \cdot e^{-2x}$ und $g_2(x) = a - b \cdot e^{2x}$ mit $a, b > 0$.



Begründen Sie, welche der beiden Funktionsterme nicht zum Schaubild passen.

Ermitteln Sie für den geeigneten Funktionsterm passende Werte für a und b . (6 Punkte)

2.2

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \frac{3}{4}e^{2x} - 2x - \frac{5}{2}$ und die Gerade g mit der Gleichung

$y = -2x - \frac{5}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f ist K_f .

2.2.1

Zeichnen Sie g und K_f in ein gemeinsames Koordinatensystem. Zeigen Sie, dass g stets unterhalb von K_f verläuft. (6 Punkte)

2.2.2

Die y -Achse, K_f , g und die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u < 0$ schließen eine Fläche ein. Für welches u ist deren Flächeninhalt gleich $\frac{1}{4}$? (6 Punkte)

2.3

Gegeben ist die Funktion $h(x) = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_h .

2.3.1

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an K_h im Ursprung. Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von t und K_h . Welchen Flächeninhalt besitzt die von K_h und der Tangente eingeschlossene Fläche? (6 Punkte)

2.3.2

Bestimmen Sie a so, dass das Schaubild mit der Gleichung $y = a \cdot h(x)$ die Gerade mit der Gleichung $y = 2^8$ berührt. (6 Punkte)

Lösung Hauptprüfung 2009 Aufgabe 2

2.1

Begründung, welcher Funktionsterm nicht passt:

Die beiden Funktionen unterscheiden sich lediglich beim Vorzeichen in der Hochzahl. Dieses Vorzeichen entscheidet das Verhalten des Schaubildes für $x \rightarrow \pm\infty$.

Aus dem Schaubild ist zu entnehmen, dass das Schaubild für $x \rightarrow \infty$ gegen 1,5 strebt.

Für die Funktion $g_1(x)$ gilt: Für $x \rightarrow \infty$ strebt $g_1(x) \rightarrow a$ (da $e^{-2x} \rightarrow 0$ strebt)

Für die Funktion $g_2(x)$ gilt: Für $x \rightarrow \infty$ strebt $g_2(x) \rightarrow -\infty$ (da $e^{2x} \rightarrow \infty$ strebt)

Somit kann der Funktionsterm $g_2(x)$ nicht passen.

Berechnung der Parameter a und b:

Für $x \rightarrow \infty$ strebt $g_1(x) \rightarrow a$.

Da sich das Schaubild dem Wert 1,5 für $x \rightarrow \infty$ annähert, gilt $a = 1,5$.

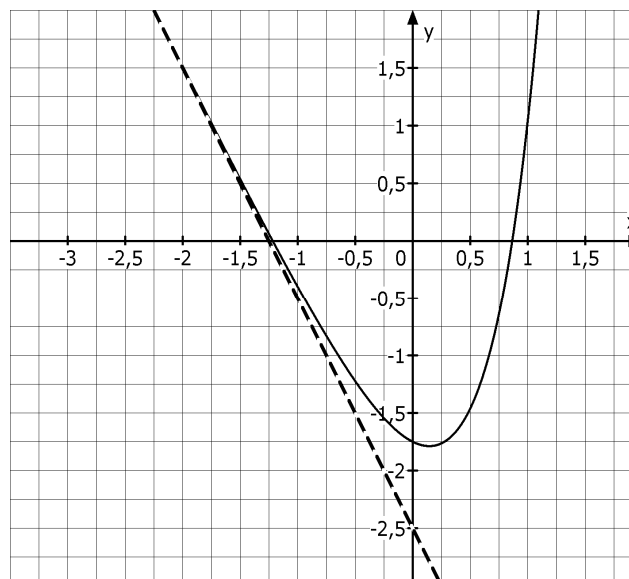
Weiterhin kann man aus dem Schaubild ablesen, dass es den Punkt S(0/-0,5) enthält:

Es gilt $g_1(0) = -0,5 \Rightarrow 1,5 - b \cdot e^0 = -0,5 \Rightarrow b = 2$

Somit gilt: $g_1(x) = 1,5 - 2e^{-2x}$

2.2.1

Schaubild von g und K_f :



Nachweis, dass g stets unterhalb von K_f verläuft:

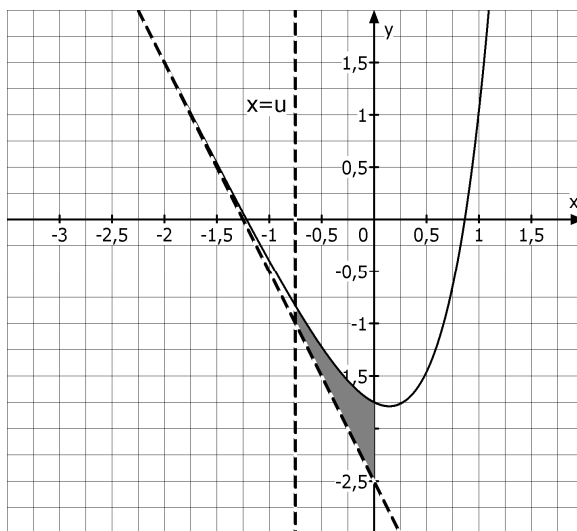
Es ist rechnerisch zu zeigen, dass $f(x) > g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \frac{3}{4}e^{2x} - 2x - \frac{5}{2} > -2x - \frac{5}{2} \quad | +2x + \frac{5}{2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{3}{4}e^{2x} > 0 \quad | : \frac{3}{4} \\
 &\Leftrightarrow e^{2x} > 0 \quad \text{und diese Aussage ist wahr für alle } x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass g stets unterhalb von K_f verläuft.

2.2.2

Skizze für die Fläche:



Berechnung der Fläche A abhängig von u:

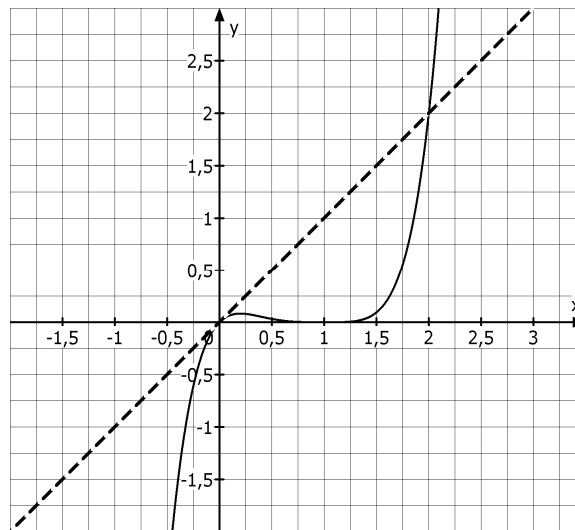
$$\begin{aligned}
 A &= \int_u^0 (f(x) - g(x)) dx = \int_u^0 \left(\frac{3}{4}e^{2x} - 2x - \frac{5}{2} - (-2x - \frac{5}{2}) \right) dx = \int_u^0 \frac{3}{4}e^{2x} dx = \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right]_u^0 \\
 &= \frac{3}{8}e^0 - \frac{3}{8}e^{2u} = \frac{3}{8} - \frac{3}{8}e^{2u}
 \end{aligned}$$

Berechnung von u:

$$\begin{aligned}
 \text{Es soll gelten: } A &= \frac{1}{4} \\
 &\Rightarrow \frac{3}{8} - \frac{3}{8}e^{2u} = \frac{1}{4} \\
 &\Leftrightarrow e^{2u} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2u = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) \approx -0,55
 \end{aligned}$$

2.3.1

Skizze des Schaubildes K_h und der Tangente im Ursprung:



Gleichung der Tangente t:

Es gilt $h'(x) = 5x^4 - 16x^3 + 18x^2 - 8x + 1$

Steigung der Tangente im Ursprung: $h'(0) = 1$

Punkt-Steigungsform: $\frac{y-0}{x-0} = 1 \Rightarrow y = x$ Tangentengleichung

Gemeinsame Punkte der Tangente t und von K_h :

Gleichsetzen der Funktionsgleichungen:

$$x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x = x$$

$$\Leftrightarrow x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^3 - 4x^2 + 6x - 4) = 0$$

Daraus folgt $x = 0$ oder $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = 2 \text{ (mit GTR)}$$

Gemeinsame Punkte: $S_1(0/0)$ (Berührungspunkt) und $S_2(2/h(2)) = S_2(2/2)$

Berechnung der Fläche A zwischen der Tangente und K_h :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (x - h(x)) dx = \int_0^2 (x - (x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x)) dx = \int_0^2 (-x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 4x^2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 = -\frac{1}{6} \cdot 64 + \frac{4}{5} \cdot 32 - \frac{3}{2} \cdot 16 + \frac{4}{3} \cdot 8 - 0 = 1,6 \end{aligned}$$

2.3.2

Berechnung von a:

Die Gerade $y = 2^8 = 256$ ist eine waagrechte Gerade.

Das Schaubild von $y = a \cdot h(x)$ ergibt sich aus dem Schaubild von h durch eine Streckung in Richtung der y-Achse.

Zunächst muss folgende Überlegung angestellt werden:

Die waagrechte Gerade muss aufgrund der geforderten Berührung eine Tangente sein.

Dies ist nur für den Hoch- oder Tiefpunkt des Schaubildes möglich.

Der Tiefpunkt hat die Koordinaten $T(1/0)$. Durch eine Streckung in Richtung der y-Achse ändern sich die Koordinaten dieses Punktes jedoch nicht, also kann dieser für keinen Wert von a die Gerade $y = 2^8 = 256$ berühren.

Berechnung des Hochpunktes von h :

Notwendige Bedingung: $h'(x) = 0$

$$\Rightarrow 5x^4 - 16x^3 + 18x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0,2 \text{ (mit GTR) oder } x = 1 \text{ (entspricht dem Tiefpunkt)}$$

Hinreichende Bedingung: $h''(x) \neq 0$

$$h''(x) = 20x^3 - 48x^2 + 36x - 8$$

$$h''(0,2) = -2,56 < 0 \Rightarrow \text{HP}(0,2/0,08192)$$

Damit der Hochpunkt die Gerade $y = 2^8 = 256$ berührt, muss a so gewählt werden, dass der neue y-Wert des Hochpunktes $y = 256$ ergibt:

$$256 = a \cdot h(0,2) \Leftrightarrow 256 = a \cdot 0,08192 \Leftrightarrow a = 3125$$