

Hauptprüfung 2009 Aufgabe 3

3.1

Die Funktion f mit dem Schaubild K_f ist gegeben durch

$$f(x) = 2 \cdot \cos(0,5x) + 2,009; \quad x \in \mathbb{R}$$

3.1.1

Skizzieren Sie K_f für $-7 \leq x \leq 7$. Begründen Sie, weshalb K_f keine Schnittpunkte mit der x -Achse hat. (5 Punkte)

3.1.2

Die x -Achse, die y -Achse, die Gerade mit der Gleichung $x = 2\pi$ und das Schaubild K_f umschließen eine Fläche. Die Gerade mit der Gleichung $x = \pi$ teilt diese Fläche. Berechnen Sie, um welchen Wert sich die Inhalte der beiden Teilflächen unterscheiden. (6 Punkte)

3.2

Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = 7 \cdot \cos(6x) + 8; \quad x \in \mathbb{R}$

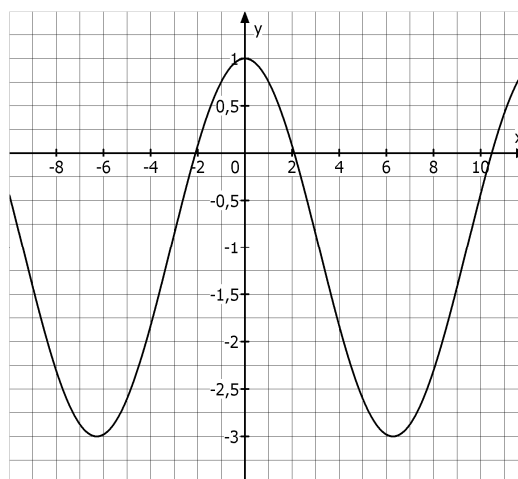
Ihr Schaubild ist K_g . Geben Sie jeweils den neuen Funktionsterm an, wenn das Schaubild K_g

- um drei Einheiten nach oben verschoben wird,
- um den Faktor 2 in y -Richtung gestreckt wird,
- an der x -Achse gespiegelt wird,
- um den Faktor 1,5 in x -Richtung gestreckt wird.

(7 Punkte)

3.3

Der Funktionsterm einer Funktion h hat die Form $h(x) = a \cdot \cos(bx) + c$. Ihr Schaubild ist K_h . In der Abbildung ist K_h mit einem Hochpunkt $H(0/1)$ und einem Wendepunkt $W(\pi/-1)$ von K_h eingezeichnet.



3.3.1

Geben Sie passende Werte für a , b und c an.

(6 Punkte)

3.3.2

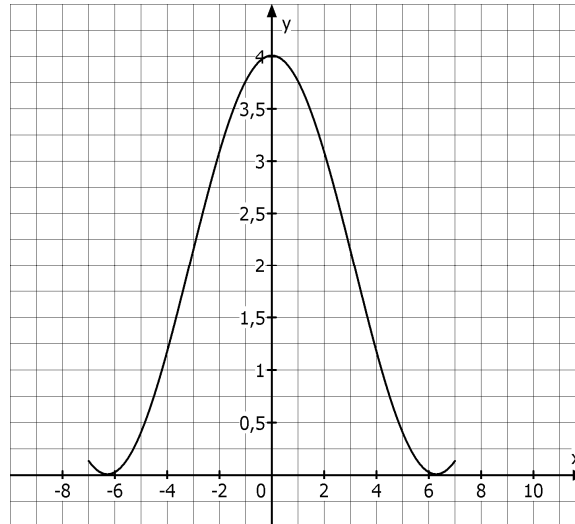
Das Schaubild K_h wird durch eine Parabel 2. Ordnung im Intervall $[-\pi; \pi]$ angenähert. Der Hochpunkt und die Wendepunkte von K_h im Intervall $[-\pi; \pi]$ sollen auf dieser Parabel liegen. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel. (6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2009 Aufgabe 3

3.1.1

Schaubild von f:



Schnittpunkte von K_f mit der x-Achse:

Bedingung: $f(x) = 0$

$$\Rightarrow 2 \cos(0,5x) + 2,009 = 0$$

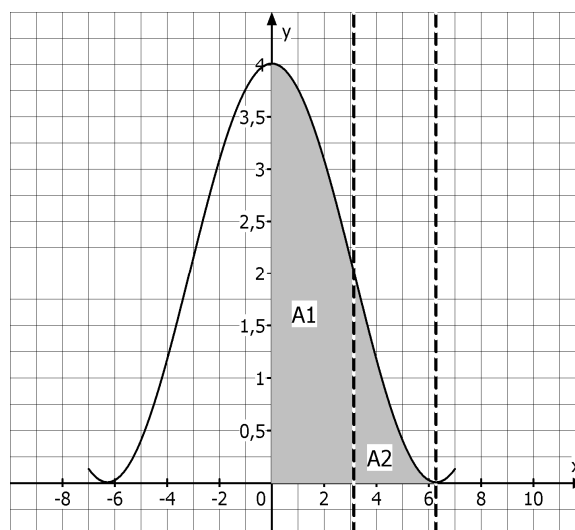
$$\Leftrightarrow 2 \cos(0,5x) = -2,009 \Leftrightarrow \cos(0,5x) = -1,0045$$

Diese Gleichung besitzt keine Lösung, da immer gilt: $-1 \leq \cos(x) \leq 1$!

Damit hat K_f keine Schnittpunkte mit der x-Achse.

3.1.2

Berechnung der Teilflächen



$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} (2 \cos(0,5x) + 2,009) dx = [4 \sin(0,5x) + 2,009x]_0^{\pi} = 4 \sin(0,5\pi) + 2,009\pi - 0 \\ &= 4 + 2,009\pi \approx 10,311 \end{aligned}$$

$$A_{\text{ges.}} = \int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} (2 \cos(0,5x) + 2,009) dx = [4 \sin(0,5x) + 2,009x]_0^{2\pi} = 4 \sin(\pi) + 2,009 \cdot 2\pi - 0$$

$$= 4,018\pi \approx 12,623$$

$$\text{Daraus folgt } A_2 = 4,018\pi - (4 + 2,009\pi) = 2,009\pi - 4 \approx 2,311$$

$$\text{Der Unterschied der Teilflächen beträgt } A_1 - A_2 = 4 + 2,009\pi - (2,009\pi - 4) = 8 \text{ [FE].}$$

3.2

- a) Verschiebung um 3 Einheiten nach oben: $f(x) = g(x) + 3 = 7 \cos(6x) + 11$
b) Streckung um Faktor 2 in y-Richtung: $f(x) = 2 \cdot g(x) = 2 \cdot (7 \cos(6x) + 8) = 14 \cos(6x) + 16$
c) Spiegelung an der x-Achse: $f(x) = -g(x) = -7 \cos(6x) - 8$
d) Streckung um Faktor $\frac{3}{2}$ in x-Richtung: $f(x) = g\left(\frac{2}{3}x\right) = 7 \cos\left(6 \cdot \frac{2}{3}x\right) + 8 = 7 \cos(4x) + 8$

3.3.1

Die waagrechte Mittellinie der Funktion ist bei -1, das heißt das Schaubild ist um 1 nach unten verschoben, also $c = -1$.

Die Amplitude a ist der Abstand von der Mittellinie bis zum Hochpunkt bzw. zum Tiefpunkt, also $a = 2$.

Der waagrechte Abstand vom Hochpunkt zum Tiefpunkt beträgt 2π , die Periode beträgt somit $p = 4\pi$.

$$\text{Es gilt } p = \frac{2\pi}{b} \Leftrightarrow b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Die Funktion lautet } h(x) = 2 \cdot \cos(0,5x) - 1.$$

3.3.2

Die allgemeine Parabelgleichung lautet $g(x) = ax^2 + bx + c$.

Da sowohl der Wendepunkt $W_1(\pi/-1)$ als auch $W_2(-\pi/-1)$ auf der Parabel liegen soll, ist die Parabel symmetrisch zur y-Achse.

Somit existieren in der Parabelgleichung nur gerade Hochzahlen (das heißt $b = 0$):

$$y = ax^2 + c$$

$$\text{Der Hochpunkt } H(0/1) \text{ liegt auf der Parabel: } g(0) = 1 \Rightarrow 1 = a \cdot 0 + c \Rightarrow c = 1$$

$$\text{Somit gilt } y = ax^2 + 1$$

$$\text{Der Wendepunkt } W_1(\pi/-1) \text{ liegt auf der Parabel: } g(\pi) = -1 \Rightarrow -1 = a \cdot \pi^2 + 1 \Rightarrow a = -\frac{2}{\pi^2}$$

$$\text{Die Parabelgleichung lautet } g(x) = -\frac{2}{\pi^2}x^2 + 1.$$