

Hauptprüfung 2009 Aufgabe 5

5.1

Die Großbäckerei Korn besteht aus den drei Teilbetrieben U, V und W, die nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten sind. Diese haben im vergangenen Produktionszeitraum folgende Mengeneinheiten (ME) für die anderen Teilbetriebe und den Markt produziert.

	U	V	W	Markt
U	x_{11}	5	10	15
V	15	x_{22}	0	25
W	10	20	x_{33}	15

5.1.1

Berechnen Sie den Eigenverbrauch der drei Teilbetriebe und die Technologiematrix A, wenn U 40 ME, V 50 ME und W 60 ME produziert. (5 Punkte)

5.1.2

Wie viele ME Backwaren können an den Markt abgegeben werden, wenn U 80 ME, V 120 ME und W 120 ME produziert ? (4 Punkte)

5.1.3

In einem anderen Produktionszeitraum produziert W das Doppelte von U und V bleibt bei seiner Produktionsmenge von 100 ME. Wie viele ME muss U mindestens produzieren, damit W an den Markt liefern kann ? (7 Punkte)

5.2

Die oben genannte Großbäckerei Korn verarbeitet Weizenmehl, Roggenmehl, Mineralwasser und sonstige Rohstoffe zu den drei Zwischenprodukten Weißbrotteig, Schwarzbrotteig und Mischteig, aus denen die drei Endprodukte Baguette, Bauernbrot und Brötchen gemäß folgender Tabellen hergestellt werden:

	Weißbrotteig	Schwarzbrotteig	Mischteig
Weizenmehl	1	3	2
Roggenmehl	0	2	2
Mineralwasser	2	0	1
Sonst. Rohstoffe	1	2	1

	Baguette	Bauernbrot	Brötchen
Weißbrotteig	2	2	3
Schwarzbrotteig	1	0	2
Mischteig	5	3	1

5.2.1

Berechnen Sie, wie viele ME Weizenmehl, Roggenmehl, Mineralwasser und sonstige Rohstoffe benötigt werden, um 10 ME Weißbrotteig, 20 ME Schwarzbrotteig und 30 ME Mischteig herstellen zu können. (4 Punkte)

5.2.2

Im Lager befinden sich noch 3240 ME Weizenmehl, 2280 ME Roggenmehl, 2160 ME Mineralwasser. Es werden gleich viele ME Baguette wie Brötchen hergestellt. Wie viele ME der Backwaren können hergestellt werden, wenn alle Lagerbestände aufgebraucht werden sollen ? Wie viele ME sonstiger Rohstoffe werden dazu benötigt ? (10 Punkte)

Lösung Hauptprüfung 2009 Aufgabe 5

5.1.1

Berechnung des Eigenverbrauchs:

Eigenverbrauch von U: $x_{11} + 5 + 10 + 15 = 40 \Rightarrow x_{11} = 10$

Eigenverbrauch von V: $15 + x_{22} + 0 + 25 = 50 \Rightarrow x_{22} = 10$

Eigenverbrauch von W: $10 + 20 + x_{33} + 15 = 60 \Rightarrow x_{33} = 15$

Berechnung der Technologiematrix A:

Matrix der Lieferung zwischen den Sektoren: $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 15 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 15 \end{pmatrix}$

Produktionsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix}$

Technologiematrix: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/40 & 5/50 & 10/60 \\ 15/40 & 10/50 & 0/60 \\ 10/40 & 20/50 & 15/60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,1 & 1/6 \\ 0,375 & 0,2 & 0 \\ 0,25 & 0,4 & 0,25 \end{pmatrix}$

5.1.2

Die Leontief-Gleichung lautet $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y}$

wobei $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix und A die Technologiematrix darstellt.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 80 \\ 120 \\ 120 \end{pmatrix}$ ist der Produktionsvektor und gesucht ist der Marktabgabevektor $\vec{y}$.

Einsetzen in die Leontiefgleichung:

$$\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,25 & 0,1 & 1/6 \\ 0,375 & 0,2 & 0 \\ 0,25 & 0,4 & 0,25 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 120 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & -0,1 & -1/6 \\ -0,375 & 0,8 & 0 \\ -0,25 & -0,4 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 120 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 66 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis der Multiplikation ergibt sich mit Hilfe des GTR.

In den GTR ist eine 3x3-Matrix und eine 3x1-Matrix einzugeben. Diese Matrizen können dann mit Hilfe des GTR multipliziert werden können.

U gibt 28 ME, V gibt 66 ME und W gibt 22 ME an den Markt ab.

5.1.3

Für den Produktionsvektor gilt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 100 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$ und für den Marktvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Aus der Leontief-Gleichung $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y}$ folgt:

$$\begin{pmatrix} 0,75 & -0,1 & -\frac{1}{6} \\ -0,375 & 0,8 & 0 \\ -0,25 & -0,4 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 100 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Damit W an den Markt liefern kann, muss $y_3 > 0$ gelten.

Aus der Leontief-Gleichung folgt aus der dritten Zeile:

$$-0,25x_1 - 0,4 \cdot 100 + 1,5x_1 = y_3$$

$$\Leftrightarrow 1,25x_1 - 40 = y_3$$

$$\text{Bedingung: } 1,25x_1 - 40 > 0 \Leftrightarrow 1,25x_1 > 40 \Rightarrow x_1 > 32$$

Damit W an den Markt liefern kann, muss U mehr als 32 ME produzieren.

5.2.1

Die erste Tabelle stellt die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A_{RZ} dar. Außerdem ist der Produktionsvektor $\vec{p}_Z$ für die Zwischenprodukte gegeben:

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{p}_Z = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist der Verbrauchsvektor $\vec{p}_R$ für die Rohstoffe.

Es gilt die Gleichung

$$A_{RZ} \cdot \vec{p}_Z = \vec{p}_R \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + 60 + 60 \\ 0 + 40 + 60 \\ 20 + 0 + 30 \\ 10 + 40 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 100 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Es werden 130 ME Weizenmehl, 100 ME Roggenmehl, 50 ME Mineralwasser und 80 ME sonstige Rohstoffe benötigt.

5.2.2

Berechnung der Rohstoff-Endprodukt-Matrix:

Da in der Aufgabe Rohstoffmengen vorgegeben sind und Endproduktmengen gesucht sind, wird die Rohstoff-Endprodukt-Matrix A_{RE} benötigt.

Es gilt: $A_{RZ} \cdot A_{ZE} = A_{RE}$ mit der Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $A_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 11 \\ 12 & 6 & 6 \\ 9 & 7 & 7 \\ 9 & 5 & 8 \end{pmatrix} = A_{RE}$$

Die Berechnung kann entweder direkt erfolgen oder mit Hilfe des GTR.

Berechnung des Endproduktvektors:

Gegeben: Rohstoffvektor $\vec{p}_R = \begin{pmatrix} 3240 \\ 2280 \\ 2160 \\ r_4 \end{pmatrix}$ gesucht: Endproduktvektor $\vec{p}_E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$

Es gilt die Formel: $A_{RE} \cdot \vec{p}_E = \vec{p}_R \Rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 8 & 11 \\ 12 & 6 & 6 \\ 9 & 7 & 7 \\ 9 & 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3240 \\ 2280 \\ 2160 \\ r_4 \end{pmatrix}$

Das ergibt folgendes lineares Gleichungssystem: Die Variable r_4 wird als 4.Variable des Gleichungssystems betrachtet und deshalb auf die linke Seite gebracht:

$$\begin{array}{rclcl} 15e_1 & + & 8e_2 & + & 11e_3 & & = & 3240 \\ 12e_1 & + & 6e_2 & + & 6e_3 & & = & 2280 \\ 9e_1 & + & 7e_2 & + & 7e_3 & & = & 2160 \\ 9e_1 & + & 5e_2 & + & 8e_3 & - & r_4 & = & 0 \end{array}$$

Mit Hilfe des GTR kann das Gleichungssystem gelöst werden.

Es ergeben sich die Lösungen $e_1 = 100$; $e_2 = 80$; $e_3 = 100$; $r_4 = 2100$.

Damit können 100 ME Baguette, 80 ME Bauernbrot und 100 ME Brötchen hergestellt werden.

Außerdem werden 2100 ME von den sonstigen Rohstoffen benötigt.