

## Hauptprüfung 2009 Aufgabe 7

### 7.1

Die Firma Schein AG hat sich auf die Herstellung von exklusiven Autoscheinwerfern spezialisiert. Bei der Überprüfung der Kosten- und Gewinnsituation erhält die Geschäftsleitung folgende Angaben:

Die Grenzkosten entwickeln sich wie die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 3x^2 - 12x + 15$ , wobei  $x$  die produzierte Menge in Mengeneinheiten [1 ME = 1000 Stück] bezeichnet. Bei einer Produktionsmenge von 4 ME betragen die Stückkosten 10 Geldeinheiten [1 GE = 10000 €]. Ermitteln Sie eine Polynomfunktion dritten Grades, die den Zusammenhang zwischen Produktionsmenge und Gesamtkostenfunktion beschreibt. (6 Punkte)

### 7.2

Die Gesellschaft rechnet in der nächsten Abrechnungsperiode mit folgender Gesamtkostenfunktion  $K$  und Erlösfunktion  $E$ :

$$K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 12$$

$$E(x) = 17x, \text{ wobei } 0 \leq x \leq 7 \text{ (mit den Einheiten aus 7.1)}$$

#### 7.2.1

Bei der Produktion welcher Stückzahlen wird Gewinn gemacht ?

Ermitteln Sie den maximalen Gewinn in Euro.

(6 Punkte)

#### 7.2.2

Bei welcher Stückzahl liegt das Betriebsminimum ? Welcher Preis muss für einen Scheinwerfer mindestens erzielt werden, wenn die variablen Kosten im Betriebsminimum gedeckt werden sollen ?

(6 Punkte)

### 7.3

Vom Großhandel werden Scheinwerfer zu folgenden Preisen (auf volle Euro gerundet) angeboten:

| Preis  | 190-194 | 195-199 | 200-204 | 205-209 | 210-214 | 215-219 | 220-224 | 225-229 |
|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Anzahl | 370     | 730     | 210     | 1240    | 180     | 1270    | 230     | 770     |

#### 7.3.1

Zu welchem Durchschnittspreis werden die Scheinwerfer angeboten, wenn man davon ausgeht, dass der Durchschnittspreis jedes Preissegments einen Euro unter dem Höchstpreis liegt ?

(4 Punkte)

#### 7.3.2

Stellen Sie die Werte aus der Tabelle in einem Säulendiagramm dar.

(4 Punkte)

#### 7.3.3

Inwiefern weicht die Verteilung der Preise in der Tabelle von einer Normalverteilung ab ? Nennen Sie einen möglichen Grund für die Abweichung. Ändern Sie die Klassenbreiten so, dass dann eine bessere Annäherung an eine Normalverteilung vorliegt.

(4 Punkte)

-----  
30 Punkte

## Lösung Hauptprüfung 2009 Aufgabe 7

### 7.1

Es sei  $K(x)$  die Gesamtkostenfunktion.

Dann ist  $K'(x) = f(x) = 3x^2 - 12x + 15$  die Grenzkostenfunktion.

Daraus folgt  $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + d$ .

Die Stückkostenfunktion lautet  $k(x) = \frac{K(x)}{x} = x^2 - 6x + 15 + \frac{d}{x}$ .

Bei 4 ME betragen die Stückkosten 10 GE, also gilt  $k(4) = 10$

$$\Rightarrow 10 = 16 - 24 + 15 + \frac{d}{4} \Leftrightarrow 3 = \frac{d}{4} \Leftrightarrow d = 12$$

Die Gesamtkostenfunktion lautet  $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 12$

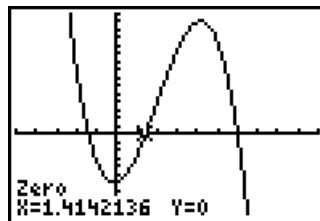
### 7.2.1

Berechnung der Produktion, bei der Gewinn gemacht wird:

Für die Gewinnfunktion  $G(x)$  gilt:

$$G(x) = E(x) - K(x) = 17x - (x^3 - 6x^2 + 15x + 12) = -x^3 + 6x^2 + 2x - 12$$

Skizze der Gewinnfunktion:



Das Schaubild von  $G(x)$  schneidet die x-Achse bei  $x = 1,4142$  und  $x = 6$ .

Innerhalb des Intervalls  $[1,4142 ; 6]$  verläuft das Schaubild von  $G(x)$  oberhalb der x-Achse, das heißt, es wird Gewinn gemacht.

Die Gewinnzone liegt zwischen  $x = 1,4142$  (das sind 1414 Stück) und  $x = 6$  (das sind 6000 Stück).

Berechnung des maximalen Gewinns:

Gesucht ist das Maximum der Gewinnfunktion:

Notwendige Bedingung:  $G'(x) = 0$

$$G'(x) = -3x^2 + 12x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 3 \cdot 2}}{-6} = \frac{-12 \pm \sqrt{168}}{-6}$$

$$\Rightarrow x_1 = -0,17 \text{ und } x_2 = 4,16$$

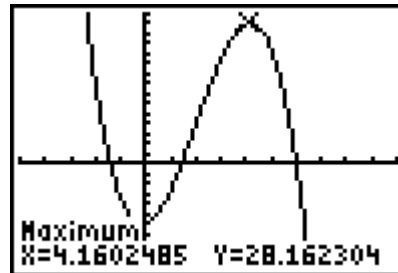
Da  $x = -0,17$  (negativer Wert) als Lösung nicht in Frage kommt, kann nur  $x = 4,16$  möglich sein.

Hinreichende Bedingung für ein Maximum:  $G''(x) < 0$

Mit  $G''(x) = -6x + 12$  folgt  $G''(4,16) = -12,96 < 0$  und damit liegt ein Maximum vor.

Es gilt  $G(4,16) = 28,1623 \text{ GE} = 281623 \text{ €}$

Man könnte den maximalen Gewinn auch direkt mit dem GTR ermitteln:



7.2.2.

#### Berechnung Betriebsminimum:

Das Betriebsminimum entspricht dem Tiefpunkt der variablen Stückkostenfunktion  $k_v(x)$ :

Gesamtkostenfunktion:  $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 12$

variable Kostenfunktion:  $K_v(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$

variable Stückkostenfunktion:  $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = x^2 - 6x + 15$

Notwendige Bedingung für Betriebsminimum:  $k'_v(x) = 0$

$k'_v(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

Hinreichende Bedingung für Betriebsminimum:  $k''_v(x) > 0$

Mit  $k''_v(x) = 2$  folgt  $k''_v(3) = 2 > 0$

Damit liegt bei  $x = 3$  (also bei 3000 Stück) ein Betriebsminimum vor.

#### Preisminimum für Scheinwerfer:

Die variablen Stückkosten im Betriebsminimum betragen  $k_v(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 15 = 6 \left[ \frac{\text{GE}}{\text{ME}} \right]$

Es gilt  $6 \frac{\text{GE}}{\text{ME}} = 6 \cdot \frac{10000\text{€}}{1000\text{Stück}} = \frac{60\text{€}}{1\text{Stück}}$

Die variablen Kosten sind im Betriebsminimum bei einem Preis von 60€ pro Stück gedeckt.

#### **7.3.1**

#### Berechnung des Durchschnittspreises:

Insgesamt sind es 5000 Scheinwerfer:

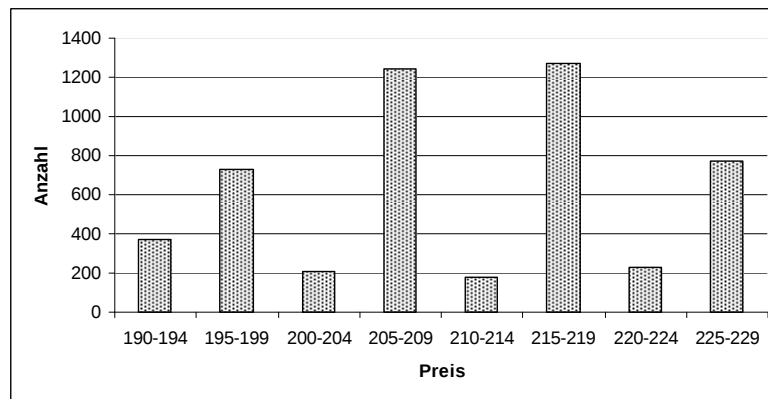
Durchschnittspreis =

$$\frac{370 \cdot 193 + 730 \cdot 198 + 210 \cdot 203 + 1240 \cdot 208 + 180 \cdot 213 + 1270 \cdot 218 + 230 \cdot 223 + 770 \cdot 228}{5000}$$

= 21171 €

### 7.3.2

Säulendiagramm:



### 7.3.3

Abweichung von der Normalverteilung:

Wären die Werte normalverteilt, dann würden die Säulenhöhen in der Nähe des Durchschnittswertes von 211,71 € höher sein und je weiter die Säulen vom Durchschnittswert abweichen, würden sie niedriger werden. Die drei Säulen für 200 – 204 und 210 – 214 und 220-224 sind zu niedrig.

Grund für die Abweichung:

Die Scheinwerferpreise werden häufig auf volle Zehner gerundet.

Mögliche Klassenbildung für die Annäherung an eine Normalverteilung:

|            |         |         |         |         |
|------------|---------|---------|---------|---------|
| Preis in € | 190-199 | 200-209 | 210-219 | 220-229 |
| Anzahl     | 1100    | 1450    | 1450    | 1000    |