

Hauptprüfung 2008 Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}e^{\ln(5) \cdot x} + \frac{5}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f .

2.1

Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte von K_f . Zeigen Sie, dass alle Tangenten an K_f eine negative Steigung haben. Begründen Sie, dass K_f keine Wendepunkte besitzt. Zeichnen Sie K_f in ein geeignetes Koordinatensystem. (8 Punkte)

2.2

Die Tangente an K_f an der Stelle $x = 1$ schneidet die y -Achse im Punkt $B(0/b)$. Berechnen Sie den Wert für b exakt. (4 Punkte)

2.3

Der Ursprung und der Punkt $P(u/f(u))$ mit $0 < u < 1$ sind die Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks. Für welches u ist die Fläche des Rechtecks maximal? (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{2}e^{\ln(5) \cdot x} + \frac{5}{2}x$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_g .

2.4

Zeigen Sie, dass die x -Achse, K_f und K_g einen gemeinsamen Punkt besitzen. Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_g . Wie viele gemeinsamen Punkte hat K_g mit der x -Achse? Begründen Sie Ihre Antwort. Zeichnen Sie K_g in das Koordinatensystem von Aufgabenteil 2.1. (8 Punkte)

2.5

Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u < 1$ und die Schaubilder K_f und K_g schließen eine Fläche ein. Bestimmen Sie u so, dass der Flächeninhalt dieser Fläche gleich 5 ist. (6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2008 Aufgabe 2

2.1

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = -\frac{1}{2}e^0 + \frac{5}{2} = 2 \Rightarrow S_y(0/2)$$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}e^{\ln(5)x} + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow e^{\ln(5)x} = 5 \Rightarrow \ln(5) \cdot x = \ln 5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow N(1/0)$$

Ableitungen:

$$f(x) = -\frac{1}{2}e^{\ln(5)x} + \frac{5}{2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}\ln(5) \cdot e^{\ln(5)x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot (\ln(5))^2 \cdot e^{\ln(5)x}$$

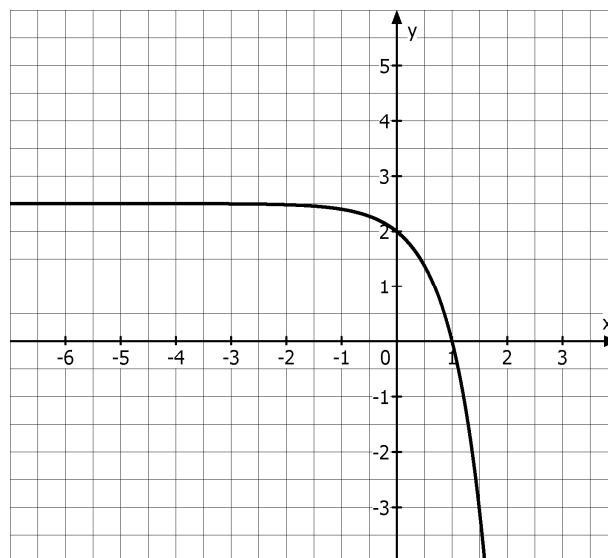
Tangentensteigungen:

Da $f'(x) = -\frac{1}{2}\ln(5) \cdot e^{\ln(5)x} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, besitzen alle Tangenten eine negative Steigung.

Wendepunkte:

Da $f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot (\ln(5))^2 \cdot e^{\ln(5)x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, existieren keine Wendepunkte.

Schaubild:



2.2

Berechnung der Tangentengleichung an der Stelle $x = 1$:

Der Berührungspunkt der Tangente hat die Koordinaten $P(1/f(1)) = P(1/0)$

Steigung der Tangente: $f'(1) = -\frac{5}{2} \cdot \ln(5)$

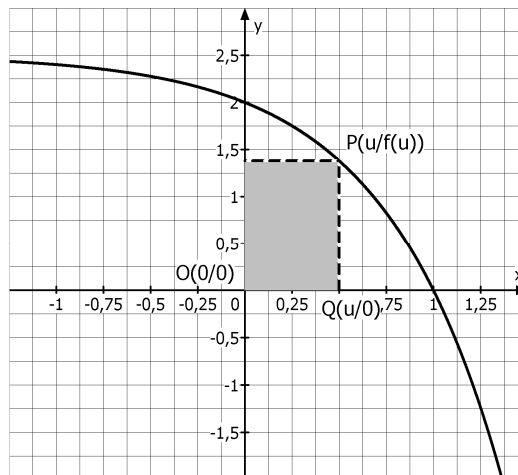
Punkt-Steigungs-Form: $y - 0 = -\frac{5}{2} \cdot \ln(5) \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -\frac{5}{2} \cdot \ln(5) \cdot x + \frac{5}{2} \cdot \ln(5)$

Berechnung von b:

Einsetzen von $x = 0$ in die Tangentengleichung ergibt $y = \frac{5}{2} \ln(5)$.

Der Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse lautet $B(0 / \frac{5}{2} \ln(5))$ und damit $b = \frac{5}{2} \ln(5)$.

2.3



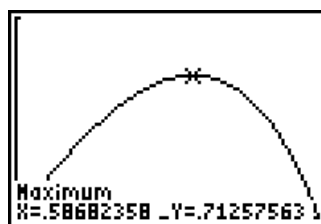
Fläche des Rechtecks: $A = \overline{OQ} \cdot \overline{PQ}$ mit $\overline{OQ} = u - 0 = u$ und $\overline{PQ} = f(u) - 0 = f(u)$

Die Zielfunktion lautet $A(u) = u \cdot f(u) = u \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{\ln(5) \cdot u} + \frac{5}{2} \right)$ mit $0 < u < 1$.

Gesucht ist das Maximum der Funktion $A(u)$, das mit dem GTR ermittelt werden kann:

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=X*(-0.5*e^(1
n(5)*X)+2.5)
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
    
```



Die Fläche wird maximal für $u = 0,59$. Der maximale Flächeninhalt beträgt 0,713 FE.

2.4

Gemeinsamer Punkt auf der x-Achse:

Das Schaubild von $f(x)$ schneidet die x-Achse bei $N(1/0)$ gemäß Aufgabe 2.1

Da $g(1) = -\frac{1}{2} e^{\ln(5)} + \frac{5}{2} = 0$ gilt, liegt der Punkt $N(1/0)$ auch auf dem Schaubild von $g(x)$.

Somit besitzen die x-Achse und die Schaubilder K_f und K_g den gemeinsamen Punkt $N(1/0)$.

Krümmungsverhalten von $g(x)$:

Um das Krümmungsverhalten zu bestimmen, muss das Vorzeichen der zweiten Ableitung untersucht werden:

$$g'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \ln(5) \cdot e^{\ln(5) \cdot x} + \frac{5}{2}$$

$$g''(x) = -\frac{1}{2} \cdot (\ln(5))^2 \cdot e^{\ln(5) \cdot x}$$

Da $g''(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist das Schaubild K_g rechtgekrümmt.

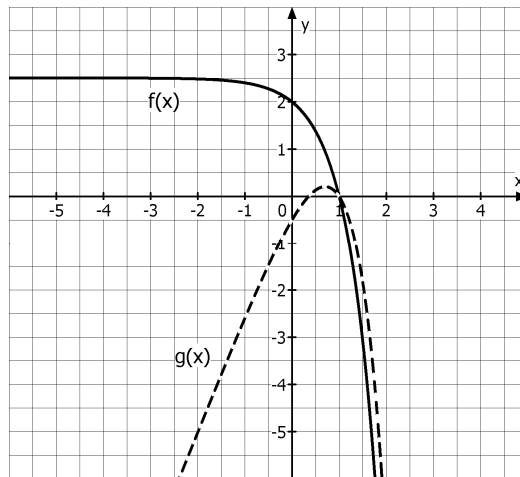
Schnittpunkte von $g(x)$ mit der x-Achse:

$$\text{Ansatz: } g(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} e^{\ln(5) \cdot x} + \frac{5}{2} x = 0$$

Mit dem GTR ergeben sich die Lösungen $x = 1$ oder $x \approx 0,35$

K_g hat aufgrund der Rechtskrümmung genau zwei Schnittpunkte mit der x-Achse.

Schaubild:



2.5

Die Fläche wird mit Hilfe eines Integrals ermittelt mit den Grenzen $x = u$ und $x = 1$:

$$\begin{aligned} A &= \int_u^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_u^1 \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2} x \right) dx = \left[\frac{5}{2} x - \frac{5}{4} x^2 \right]_u^1 = \frac{5}{2} - \frac{5}{4} - \frac{5}{2} u + \frac{5}{4} u^2 \\ &= \frac{5}{4} u^2 - \frac{5}{2} u + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Da die Fläche 5 FE groß sein soll, muss nun gelten:

$$\frac{5}{4} u^2 - \frac{5}{2} u + \frac{5}{4} = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{4} u^2 - \frac{5}{2} u - \frac{15}{4} = 0 \Leftrightarrow u^2 - 2u - 3 = 0$$

$$\Rightarrow u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow u_1 = 3 \text{ oder } u_2 = -1.$$

Da $u < 1$ sein soll, ist die gesuchte Lösung $u = -1$.