

Hauptprüfung 2008 Aufgabe 3

Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 \text{ und } g(x) = -x^3 + 3 \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

Ihre Schaubilder heißen K_f und K_g .

3.1

Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen von f . Geben Sie alle Extrem- und Wendestellen von K_f an. Welche y -Werte haben die Hoch-, Tief- und Wendepunkte ?

(7 Punkte)

3.2

Welche besondere Eigenschaft hat der Wendepunkt von K_g ? Begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie die Nullstelle von g .

(4 Punkte)

3.3

Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von K_f und K_g . Zeichnen Sie K_f und K_g in ein gemeinsames Schaubild.

(5 Punkte)

3.4

K_f , K_g und die y -Achse schließen eine Fläche ein, die von der Geraden $y = 2$ in zwei Teilflächen geteilt wird. Ermitteln Sie die Differenz der Flächeninhalte.

(5 Punkte)

3.5

Der Term von f soll so abgeändert werden, dass der Wertebereich von f das Intervall $[0;4]$ bzw. das Intervall $[-1;5]$ ist. Geben sie jeweils eine Möglichkeit an.

(4 Punkte)

3.6

Die Funktion h mit $h(x) = \sin(a \cdot \pi \cdot x) + 1$ hat bei $x = 1$ ihre kleinste positive Nullstelle.

Bestimmen Sie a . Berechnen Sie für dieses a die zweitkleinste positive Nullstelle von h exakt.

(5 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2008 Aufgabe 3

3.1

Ableitungen:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad f''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad f'''(x) = -\frac{\pi^3}{8} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

Extremstellen:

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$$

$$\Rightarrow \dots \frac{\pi}{2}x = -\frac{3}{2}\pi \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2}x = -\frac{1}{2}\pi \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2}x = \frac{1}{2}\pi \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2}x = \frac{3}{2}\pi \quad \text{oder} \dots$$

$$\Rightarrow \dots x = -3 \quad \text{oder} \quad x = -1 \quad \text{oder} \quad x = 1 \quad \text{oder} \quad x = 3 \quad \text{oder} \dots$$

$$f''(-3) < 0 \Rightarrow \text{HP} \quad f''(-1) > 0 \Rightarrow \text{TP} \quad f''(1) < 0 \Rightarrow \text{HP} \quad f''(3) > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

Es gibt unendlich viele Extremstellen. Diese befinden sich bei $x = \dots -3, -1, 1, 3, \dots$

Wendestellen:

Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$$

$$\Rightarrow \dots \frac{\pi}{2}x = -\pi \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2}x = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2}x = \pi \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2}x = 2\pi \quad \text{oder} \dots$$

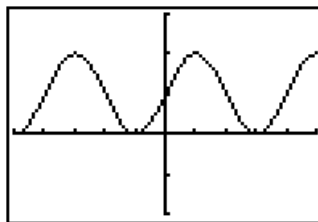
$$\Rightarrow \dots x = -2 \quad \text{oder} \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2 \quad \text{oder} \quad x = 4 \quad \text{oder} \dots$$

$$f'''(-2) \neq 0 \Rightarrow \text{WP} \quad f'''(0) \neq 0 \Rightarrow \text{WP} \quad f'''(2) \neq 0 \Rightarrow \text{WP} \quad f'''(4) \neq 0 \Rightarrow \text{WP}$$

Es gibt unendlich viele Wendestellen. Diese befinden sich bei $x = \dots -2, 0, 2, 4, \dots$

y-Werte:

Aufgrund der Skizze des Schaubildes ergibt sich, dass die y-Werte aller Hochpunkte identisch sind. Das gleiche gilt für die Tiefpunkte und Wendepunkte.



y-Wert der Tiefpunkte: $f(-1) = 0$ das heißt die Tiefpunkte haben den y-Wert 0.

y-Wert der Hochpunkte: $f(-3) = 2$ das heißt die Hochpunkte haben den y-Wert 2.

y-Wert der Wendepunkte: $f(-2) = 1$ das heißt die Wendepunkte haben den y-Wert 1.

3.2

Ableitungen von $g(x)$:

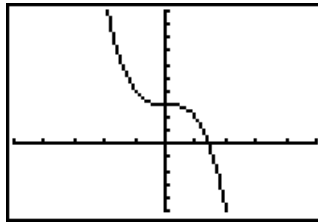
$$g'(x) = -3x^2 \quad g''(x) = -6x \quad g'''(x) = -6$$

Wendepunkte von $g(x)$:

Hinreichende Bedingung: $g''(x) = 0$ und $g'''(x) \neq 0$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$g'''(0) = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{WP}(0 / g(0)) = \text{WP}(0 / 3)$$



Anhand der Skizze von $g(x)$ ist zu vermuten, dass es sich bei dem Wendepunkt um einen Sattelpunkt handelt (also einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente).

Kontrolle: $g'(0) = 0$

Damit liegt bei $W(0/3)$ ein Sattelpunkt vor.

Nullstelle von $g(x)$:

$$\text{Ansatz: } g(x) = 0 \Rightarrow -x^3 + 3 = 0 \Rightarrow x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3} \approx 1,442$$

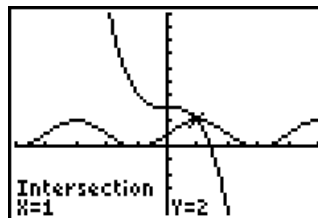
Die Nullstelle von $g(x)$ lautet $N(\sqrt[3]{3} / 0)$.

3.3

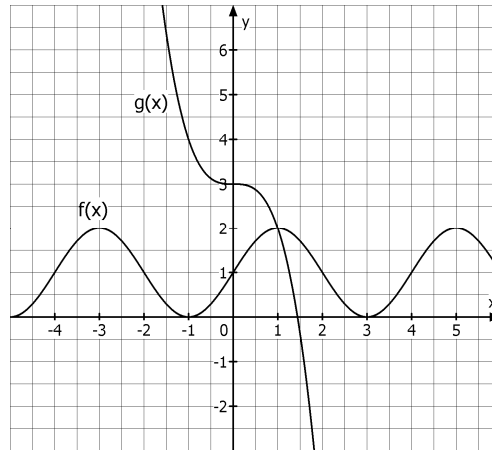
Schnittpunkt von $f(x)$ und $g(x)$:

$$\text{Ansatz: } f(x) = g(x) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 = -x^3 + 3$$

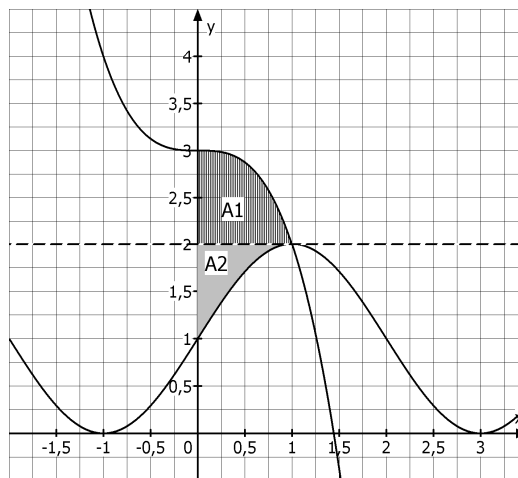
Lösung mit dem GTR:



Der Schnittpunkt lautet $S(1/2)$.



3.4



$$A_1 = \int_0^1 (g(x) - 2) dx = \int_0^1 (-x^3 + 1) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + x \right]_0^1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

$$A_2 = \int_0^1 (2 - f(x)) dx = \int_0^1 (1 - \sin(\frac{\pi}{2}x)) dx = \left[x + \frac{2}{\pi} \cos(\frac{\pi}{2}x) \right]_0^1 = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot 0 - (0 + \frac{2}{\pi}) = 1 - \frac{2}{\pi}$$

$$\text{Differenz der Flächeninhalte: } A_1 - A_2 = \frac{3}{4} - (1 - \frac{2}{\pi}) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{4} \approx 0,387$$

3.5

Die allgemeine Sinusfunktion lautet $y = a \cdot \sin(k \cdot x) + d$

Auf den Wertebereich der Sinusfunktion haben die Werte a (=Amplitude) und d (=Verschiebung der Sinusfunktion in y -Richtung) Einfluss.

Der Wertebereich der gegebenen Funktion $g(x)$ (mit $a = 1$ und $d = 1$) ist das Intervall $[0 ; 2]$.

Damit der Wertebereich das Intervall $[0;4]$ umfasst, muss die Amplitude $a = \frac{4-0}{2} = 2$ lauten.

Die waagrechte „Mittellinie“ der Sinusfunktion befindet sich auf der Höhe $d = \frac{4+0}{2} = 2$.

Eine mögliche Funktion lautet $f^*(x) = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x) + 2$

Damit der Wertebereich das Intervall $[-1;5]$ umfasst muss die Amplitude $a = \frac{5 - (-1)}{2} = 3$ lauten. Die waagrechte „Mittellinie“ der Sinusfunktion befindet sich auf der Höhe $d = \frac{5 + (-1)}{2} = 2$.

Eine mögliche Funktion lautet $f^*(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$.

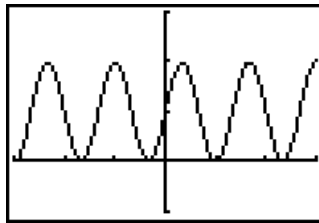
3.6

Für die Funktion $h(x) = \sin(a \cdot \pi \cdot x) + 1$ soll gelten:

$$h(1) = 0 \Rightarrow \sin(a \cdot \pi) + 1 = 0 \Rightarrow \sin(a \cdot \pi) = -1$$

$$\Rightarrow a \cdot \pi = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

Skizze von $h(x) = \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \pi \cdot x\right) + 1$



Die Periode der Funktion beträgt $p = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{4}{3}$

Da die Nullstellen bei dieser Funktion gleichzeitig die Tiefpunkte darstellen, haben die Nullstellen jeweils einen Abstand von einer Periodenlänge.

Die nächste Nullstelle ist somit bei $x = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$