

Hauptprüfung 2008 Aufgabe 4

Gegeben sind die Punkte $A(3/4/2)$, $B(6/6/0)$ und $C(0/0/4)$ und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

4.1

Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an, die durch die Punkte A und B geht. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel δ der Geraden g und h .

Zeichnen Sie die Geraden g und h , die Punkte A , C und den Schnittwinkel δ in ein räumliches Koordinatensystem ein.

(x_2 - und x_3 -Achse mit $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$; x_1 -Achse mit dem Schrägwinkel 45° und

$$1 \text{ LE} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ cm}) \quad (14 \text{ Punkte})$$

4.2

Zeigen Sie, dass der Punkt $C(0/0/4)$ auf der Geraden g liegt. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 , die auf g liegen und von C aus den Abstand $\sqrt{117}$ haben.

(6 Punkte)

4.3

Welche besondere Lage hat die Gerade g im Koordinatensystem? Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S_{12} von g mit der $x_1 - x_2$ -Ebene. (3 Punkte)

4.4

Gegeben ist zusätzlich der Punkt $Q(-3/0/6)$ auf g . Beschreiben Sie, was man unter dem Abstand des Punktes A von der Geraden g versteht. Wie kann man diesen Abstand bei der Flächenberechnung des Dreiecks AQC verwenden?

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks AQC .

(7 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2008 Aufgabe 4

4.1

Geradengleichung von h:

$$h: \vec{x} = \vec{OA} + t \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Schnittpunkt S von g und h:

$$\text{Gleichsetzen der Geradengleichungen: } \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aus der 2. Zeile: $0 = 4 + 2t \Rightarrow t = -2$

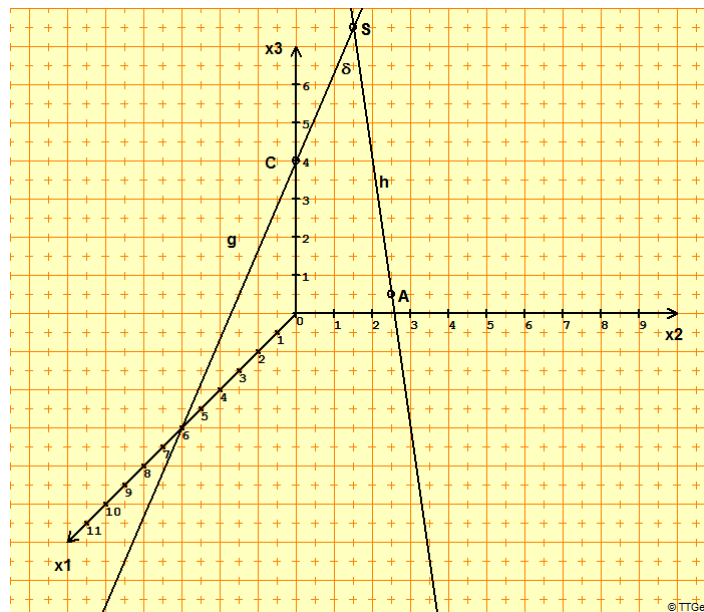
Aus der 3. Zeile: $1 + 2r = 2 - 2 \cdot (-2) \Rightarrow r = 2,5$

Test, ob 1. Zeile passt: $4,5 - 3 \cdot 2,5 = 3 + 3 \cdot (-2) \Rightarrow -3 = -3$ ist eine wahre Aussage

$$\text{Einsetzen von } t = -2 \text{ in die Gerade h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow S(-3/0/6)$$

Schnittwinkel von g und h:

$$\cos \delta = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9+0+4} \cdot \sqrt{9+4+4}} = \frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} \Rightarrow \delta = 29,02^\circ$$



4.2

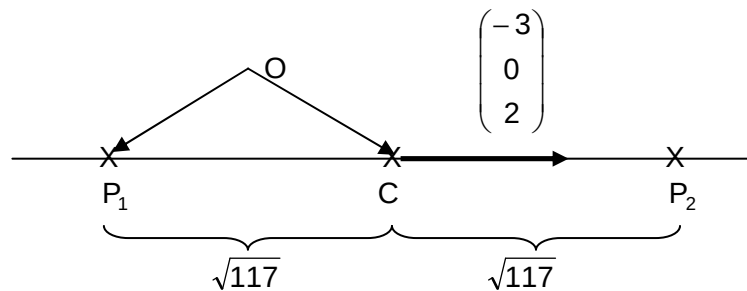
Punktprobe für C:

Einsetzen der Koordinaten in Gleichung von g:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aus 1. Zeile: $0 = 4,5 - 3r \Rightarrow r = 1,5$

Aus 3. Zeile: $4 = 1 + 2r \Rightarrow r = 1,5$

Da alle 3 Zeilen für $r = 1,5$ erfüllt sind, liegt C auf der Gerade g.



Zur Ermittlung von P₁ und P₂ muss der Einheitsvektor von $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ermittelt werden:

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnung von P₁ und P₂ mit Hilfe eines Vektorzuges:

$$\vec{OP_2} = \vec{OC} + \sqrt{117} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2(-9/0/10)$$

$$\vec{OP_1} = \vec{OC} - \sqrt{117} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1(9/0/-2)$$

4.3

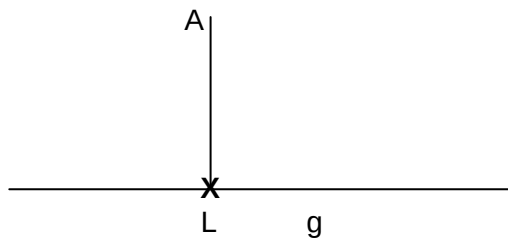
An der Geradengleichung von g erkennt man, dass die zweite Zeile $x_2 = 0$ ist.

Das bedeutet, dass sich die Gerade g in der $x_1 - x_3$ -Ebene findet.

Schnittpunkt von g mit der $x_1 - x_2$ -Ebene:

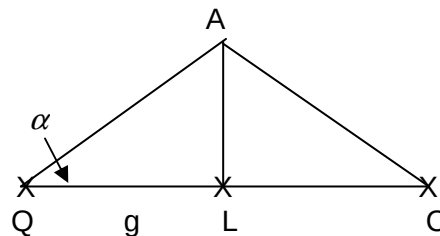
Die Bedingung lautet $x_3 = 0$. Daraus folgt $x_3 = 1 + 2r = 0 \Rightarrow r = -0,5 \Rightarrow S_{12}(6/0/0)$

4.4



Der Abstand des Punktes A von der Geraden g entspricht der Länge des Lotes (das heißt dem kürzesten Weg) von A zu g.

Flächenberechnung des Dreiecks:



Die Punkte Q und C liegen auf der Gerade g.

Wenn man den Abstand $|\overrightarrow{AL}|$ des Punktes A von der Gerade g kennt, kann man mit Hilfe der

Formel $A_{QCA} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{QC}| \cdot |\overrightarrow{AL}|$ die Fläche des Dreiecks QCA berechnen.

Um $|\overrightarrow{AL}|$ zu ermitteln, wird zunächst der Winkel α berechnet.

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QA}}{|\overrightarrow{QC}| \cdot |\overrightarrow{QA}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+0+4} \cdot \sqrt{36+16+16}} = \frac{26}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{68}} \Rightarrow \alpha = 29,02^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{AL}|}{|\overrightarrow{QA}|} \Rightarrow |\overrightarrow{AL}| = \sqrt{68} \cdot \sin 29,02^\circ = 4$$

$$A_{QCA} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{QC}| \cdot |\overrightarrow{AL}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot 4 = 2 \cdot \sqrt{13} \approx 7,21 \text{ FE}$$