

Hauptprüfung 2008 Aufgabe 5

5.1

Gegeben ist folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -18 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 9x_3 & = & 2 \end{array}$$

5.1.1

Berechnen Sie den allgemeinen Lösungsvektor.

(4 Punkte)

5.1.2

Erweitern Sie das obige lineare Gleichungssystem um eine dritte Gleichung so, dass das neue lineare Gleichungssystem aus drei Gleichungen unlösbar ist.

(3 Punkte)

5.2

Gegeben sind die Matrizen A, B, C und D. Die Matrix A hat das Format (4x2) und die Matrix D das Format (4x3). Welche Formate müssen die Matrizen B und C haben, wenn folgende Gleichung sinnvoll ist: $(A - B) \cdot C = D$

Erläutern Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(4 Punkte)

5.3

Alle Matrizen der folgenden Gleichung sind quadratische Matrizen gleichen Formats.

E ist die Einheitsmatrix.

$$M \cdot (E - 2 \cdot X) = 3 \cdot E - N \cdot X$$

Bestimmen Sie die Lösung X der Matrixgleichung. Welche Voraussetzung muss bei der Lösung erfüllt sein ?

(4 Punkte)

5.4

Drei nach dem Leontiefmodell verflochtene Zweigwerke M_1 , M_2 und M_3 beliefern sich gegenseitig und den Markt. Die Technologie-Matrix A ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0,24 & 0,24 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,24 & 0,16 & 0,2 \end{pmatrix}$$

5.4.1

In einer Produktionsperiode liefert M_1 228 ME, M_2 280 ME und M_3 656 ME an den Markt. Erstellen Sie die zugehörige Input-Output-Tabelle.

(6 Punkte)

5.4.2

In einer anderen Produktionsperiode produziert M_1 200 ME und M_2 genauso viel wie M_3 . Das Zweigwerk M_2 gibt 50 ME an den Markt ab. Erstellen Sie ein Verflechtungsdiagramm.

(9 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung Aufgabe 5

5.1.1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & -18 \\ -2 & 1 & -9 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-1) \text{ ---} \\ \text{---} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & -18 \\ -5 & 0 & -10 & 20 \end{array} \right)$$

Es existieren unendlich viele Lösungen.

Es sei $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$

Aus der 3. Zeile folgt: $-5x_1 - 10t = 20 \Rightarrow x_1 = -4 - 2t$

Aus der 1. Zeile folgt: $3 \cdot (-4 - 2t) + x_2 + t = -18 \Rightarrow x_2 = -6 + 5t$.

Allgemeiner Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 - 2t \\ -6 + 5t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ (auch so darstellbar: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$)

5.1.2

Die dritte Gleichung kann beispielsweise so konstruiert werden, dass die linke Seite von einer der gegebenen Gleichungen übernommen wird und die rechte Seite (das Absolutglied) geändert wird.

Das neue unlösbare Gleichungssystem sieht also z.B. so aus:

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -18 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 9x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

5.2

Die Matrix B muss dasselbe Format wie Matrix A haben, sonst können die Matrizen nicht subtrahiert werden. Das Format von Matrix B ist somit (4x2).

Die Matrix A-B hat auch das Format (4x2).

Nun soll aufgrund der dargestellten Multiplikation gelten: $(A - B) \cdot C = D$

$(4 \times 2) \quad \swarrow \quad \nwarrow \quad (4 \times 3)$

Die Formate von Matrizen haben bei einer Multiplikation folgende Bauart:

$$(m \times n) \cdot (n \times k) = (m \times k)$$

Die Matrix C muss daher das Format (2 x 3) haben.

5.3

$$\begin{array}{ll} M \cdot (E - 2 \cdot X) = 3 \cdot E - N \cdot X & | \text{ Klammer auflösen} \\ \Rightarrow M \cdot E - 2 \cdot M \cdot X = 3 \cdot E - N \cdot X & | + 2 \cdot M \cdot X - 3 \cdot E \text{ und } M \cdot E = M \\ \Rightarrow M - 3 \cdot E = 2 \cdot M \cdot X - N \cdot X & | X \text{ ausklammern von rechts} \\ \Rightarrow M - 3 \cdot E = (2 \cdot M - N) \cdot X & | \cdot (2 \cdot M - N)^{-1} \text{ von links} \\ \Rightarrow (2 \cdot M - N)^{-1} \cdot (M - 3 \cdot E) = X \end{array}$$

(Es wäre auch $X = (N - 2 \cdot M)^{-1} \cdot (3 \cdot E - M)$ als Lösung möglich)

Bei der Lösung muss die Voraussetzung erfüllt sein, dass die im Ergebnis enthaltene Matrix $N-2M$ invertierbar ist.

5.4.1

Die Leontief-Gleichung lautet $\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y}$

E ist die hierbei die Einheitsmatrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 228 \\ 280 \\ 656 \end{pmatrix}$ der Marktabgabvektor

Die Berechnung des Produktionsvektors $\vec{x}$ erfolgt mit Hilfe des GTR:

MATRIX[A] 3 × 3		
[.24	.24	.2
[.2	.3	.4
[.24	.16	.2
3, 3 = .2		

MATRIX[B] 3 × 1		
[228		
[280		
[656		
3, 1 = 656		

([E] - [A]) ⁻¹ * [B]		
	[1200]	
	[1600]	
	[1500]	

Der Produktionsvektor lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1600 \\ 1500 \end{pmatrix}$.

Input-Output-Tabelle:

	Werk M_1	Werk M_2	Werk M_3	Markt	Produktion
Werk M_1	$0,24 \cdot 1200 = 288$	$0,24 \cdot 1600 = 384$	$0,2 \cdot 1500 = 300$	228	1200
Werk M_2	$0,2 \cdot 1200 = 240$	$0,3 \cdot 1600 = 480$	$0,4 \cdot 1500 = 600$	280	1600
Werk M_3	$0,24 \cdot 1200 = 288$	$0,16 \cdot 1600 = 256$	$0,2 \cdot 1500 = 300$	656	1500

5.4.2

Gegeben ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 50 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Aus der Leontief-Gleichung $\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x}$ folgt:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ 50 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,76 & -0,24 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,4 \\ -0,24 & -0,16 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Auflösen der Klammern und Darstellung als Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 y_1 + 0,44x_2 &= 152 \\
 0,3x_2 &= 90 \\
 y_3 - 0,64x_2 &= -48
 \end{aligned}$$

Mit dem GTR ergibt sich als Lösung $y_1 = 20$, $y_3 = 144$ und $x_2 = 300$

Mit Hilfe des Produktionsvektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix}$ ergibt sich die Input-Output-Tabelle

	Werk M_1	Werk M_2	Werk M_3	Markt	Produktion
Werk M_1	$0,24 \cdot 200 = 48$	$0,24 \cdot 300 = 72$	$0,2 \cdot 300 = 60$	20	200
Werk M_2	$0,2 \cdot 200 = 40$	$0,3 \cdot 300 = 90$	$0,4 \cdot 300 = 120$	50	300
Werk M_3	$0,24 \cdot 200 = 48$	$0,16 \cdot 300 = 48$	$0,2 \cdot 300 = 60$	144	300

Daraus ergibt sich folgendes Verflechtungsdiagramm:

