

Hauptprüfung 2008 Aufgabe 6

Ein Glücksrad hat gleich große Sektoren: vier rote, drei gelbe und einen blauen. Beim Stillstand des Glücksrades zeigt ein Pfeil auf genau einen Sektor. Ein Spiel besteht darin, das Glücksrad zweimal zu drehen.

6.1

Zeichnen Sie für ein Spiel ein geeignetes Baumdiagramm und berechnen sie zu jedem Spielausgang die zugehörige Wahrscheinlichkeit. (6 Punkte)

6.2

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Es wird zweimal die gleiche Farbe angezeigt.

B: Es treten verschiedene Farben auf.

C: Es tritt blau und rot auf.

D: Es wird höchstens einmal blau angezeigt.

Formulieren Sie das Gegenereignis zu D. (8 Punkte)

6.3

Ein Glücksspielbetreiber bietet für obiges Spiel folgendes an:

Zeigt der Pfeil zweimal auf den blauen Sektor, erhält der Spieler 5€.

Zeigt der Pfeil zweimal auf den gelben Sektor, erhält der Spieler 2€.

Zeigt der Pfeil zuerst auf den gelben und dann auf den blauen Sektor, erhält der Spieler 1€.

In allen anderen Fällen erhält der Spieler nichts ausbezahlt.

Mit welchem Auszahlungsbetrag kann ein Spieler im Durchschnitt bei 200 Spielen rechnen ?

Welchen Einsatz muss der Glücksspielbetreiber pro Spiel mindestens verlangen, damit das Spiel für ihn günstig ist ?

Welchen Einsatz muss der Glücksspielbetreiber pro Spiel mindestens verlangen, damit er bei 30 Spielen durchschnittlich einen Gewinn von 5€ erwarten kann ? (11 Punkte)

6.4

Bei einem neuen Spiel wird das Glücksrad fünfmal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass fünfmal rot erscheint.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zweimal gelb erscheint.

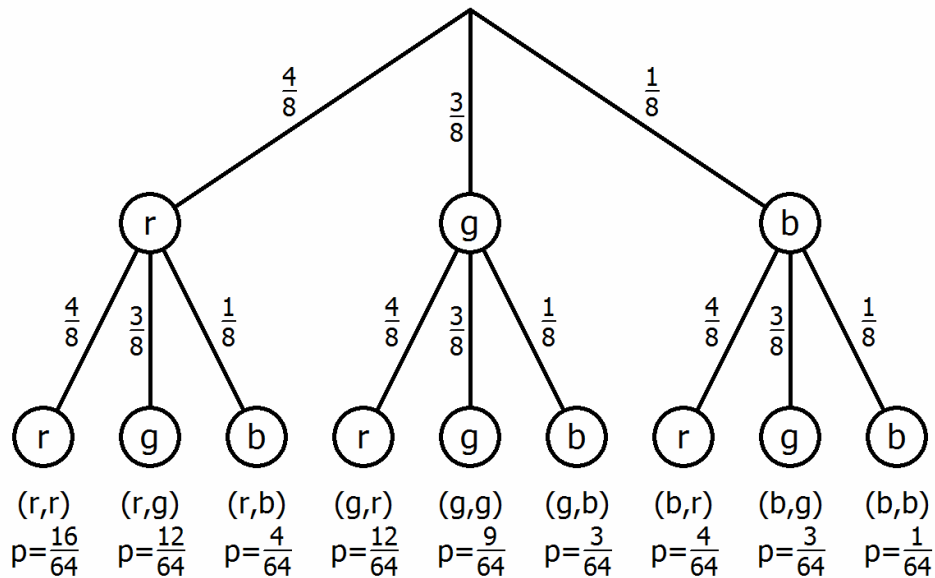
(5 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2008 Aufgabe 6

6.1

Baumdiagramm:



Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ergibt sich durch Multiplikation der Pfadwahrscheinlichkeiten, z.B. $P(bb) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

6.2

$$P(A) = P(rr) + P(gg) + P(bb) = \frac{1}{4} + \frac{9}{64} + \frac{1}{64} = \frac{13}{32}$$

$$P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{13}{32} = \frac{19}{32}$$

$$P(C) = P(rb) + P(br) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

Das Gegenereignis von D ist $\bar{D}$: „es wird zweimal blau angezeigt“

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

6.3

X sei der Auszahlungsbetrag.

$$P(X = 5) = P(bb) = \frac{1}{64} \quad P(X = 2) = P(gg) = \frac{9}{64}$$

$$P(X = 1) = P(gb) = \frac{3}{64} \quad P(X = 0) = 1 - \frac{1}{64} - \frac{9}{64} - \frac{3}{64} = \frac{51}{64}$$

$$\text{Erwarteter Auszahlungsbetrag pro Spiel} = 5 \cdot \frac{1}{64} + 2 \cdot \frac{9}{64} + 1 \cdot \frac{3}{64} + 0 \cdot \frac{51}{64} = \frac{26}{64} = 0,40625 \text{ €}$$

Bei 200 Spielen kann im Durchschnitt mit einer Auszahlung von $0,40625 \cdot 200 = 81,25 \text{ €}$ gerechnet werden.

Damit das Spiel für den Glücksspielbetreiber günstig ist (das heißt es lohnt sich für ihn), muss der Einsatz mindestens so groß wie der durchschnittliche Auszahlungsbetrag pro Spiel sein.

Der Betreiber muss (auf volle Cent gerundet) daher mindestens $0,41 \text{ €} = 41 \text{ Cent}$ pro Spiel als Einsatz verlangen, damit das Spiel für ihn günstig ist.

Damit der Glücksspielbetreiber bei 30 Spielen durchschnittlich 5 Euro erwarten kann, muss er in 30 Spielen $30 \cdot 0,40625 + 5 = 17,1875 \text{ €}$ einnehmen.

Der Einsatz pro Spiel muss daher $17,1875 : 30 = 0,573 \text{ €}$ betragen, also aufgerundet $0,58 \text{ €} = 58 \text{ Cent}$ pro Spiel.

6.4

$$P(5 \text{ mal rot}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

Für die Wahrscheinlichkeitsberechnung von „mindestens zweimal gelb“ werden die Farben des Glücksrades nur unterschieden in $P(\text{gelb}) = \frac{3}{8}$ und $P(\text{nicht gelb}) = \frac{5}{8}$

$$P(\text{mindestens zweimal gelb}) = 1 - P(\text{höchstens einmal gelb}) \\ = 1 - P(\text{kein gelb}) - P(\text{genau einmal gelb})$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^5 - \left(\frac{5}{8}\right)^4 \cdot \frac{3}{8} \cdot 5 = \frac{5067}{8192} = 0,619$$

(Der Faktor 5 ergibt sich dadurch, dass man auf 5 verschiedene Arten eine gelbe Kugel und 4 nichtgelbe Kugeln anordnen kann)