

Hauptprüfung 2008 Aufgabe 7

7.1

Die Gesamtkosten der Produktion eines Unternehmens werden durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades beschrieben. Bei vollständiger Konkurrenz gilt für die Erlösfunktion $E(x) = p \cdot x$ mit konstantem Stückpreis p . Dem Unternehmen sind folgende Daten bekannt: Für 9 Mengeneinheiten (ME) beläuft sich der Gesamterlös auf 135 Geldeinheiten (GE). Die Nutzengrenze liegt bei 12 ME. Das Betriebsminimum stellt sich bei einer Produktion von 7 ME ein. Bei 8 ME beträgt der Gewinn 12 GE. Produziert das Unternehmen 4 ME, entstehen Kosten in Höhe von 76 GE. Bestimmen Sie die Terme für die Kosten- und die Erlösfunktion. (8 Punkte)

7.2

Ein Mitbewerber rechnet bei einem gleichwertigen Produkt für die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E mit

$$K(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 15x + 36$$

$$E(x) = 15x$$

Für die Produktionsmenge x gilt: $0 \leq x \leq 18$.

7.2.1

Bestimmen Sie die Nutzenschwelle und zeichnen Sie die Schaubilder der Kosten- und Erlösfunktion in ein geeignetes Koordinatensystem. (4 Punkte)

7.2.2

Bestimmen Sie zunächst zeichnerisch die Produktionsmenge, bei der minimale Stückkosten anfallen. Überprüfen Sie anschließend ihr Ergebnis durch Rechnung und geben Sie die minimalen Stückkosten an. (5 Punkte)

7.2.3

Die Unternehmensleitung beschließt, dass die variablen Kosten der Produktion einen Betrag von 135 GE nicht überschreiten sollen. Bis zu welcher Produktionsmenge ist diese Vorgabe erfüllt? (4 Punkte)

7.2.4

Bei welcher Produktionsmenge ist der Gewinn maximal? Geben Sie den maximalen Gewinn an. (4 Punkte)

7.2.5

Das Unternehmen will seinen maximalen Gewinn steigern, ist sich aber unschlüssig, welche Strategie es verfolgen soll. Es stehen zwei alternative Varianten zur Auswahl:

Variante A: Die Fixkosten werden um 10% gesenkt.

Variante B: Die variablen Kosten werden um 5% gesenkt.

Begründen Sie durch Rechnung, welche Variante für das Unternehmen günstiger ist.

(3 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2008 Aufgabe 7

7.1

Für die Erlösfunktion gilt der Ansatz $E(x) = p \cdot x$

Es gilt $E(9) = 135 \Rightarrow 135 = 9p \Rightarrow p = 15$

Erlösfunktion: $E(x) = 15x$

Für die Kostenfunktion gilt der Ansatz $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

mit $k_v(x) = ax^2 + bx + c$ und $k'_v(x) = 2ax + b$

Bedingungen:

$K(12) = E(12) \Rightarrow 1728a + 144b + 12c + d = 180$ (Nutzengrenze $x = 12$ ME und $E(12) = 180$)

$k'_v(7) = 0 \Rightarrow 14a + b = 0$ (Betriebsminimum bei $x = 7$ ME)

$G(8) = E(8) - K(8) = 12 \Rightarrow 15 \cdot 8 - (512a + 64b + 8c + d) = 12 \Rightarrow 512a + 64b + 8c + d = 108$

(bei $x = 8$ ME Gewinn von 12 GE)

$K(4) = 76 \Rightarrow 64a + 16b + 4c + d = 76$ (bei $x = 4$ ME Kosten von 76 GE)

Folgendes lineares Gleichungssystem ist zu lösen:

$$1728a + 144b + 12c + d = 180$$

$$14a + b = 0$$

$$512a + 64b + 8c + d = 108$$

$$64a + 16b + 4c + d = 76$$

Mit dem GTR ergibt sich die Lösungen $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{7}{4}$, $c = 15$, $d = 36$

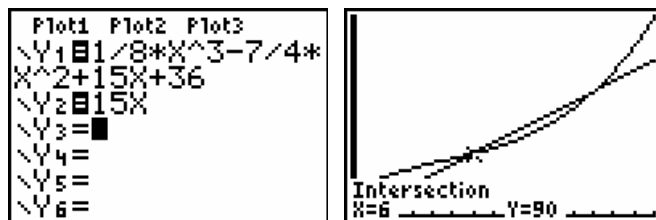
Die Kostenfunktion lautet $K(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 15x + 36$.

7.2.1

Die Nutzenschwelle ist der linke Schnittpunkt der Schaubilder K und E .

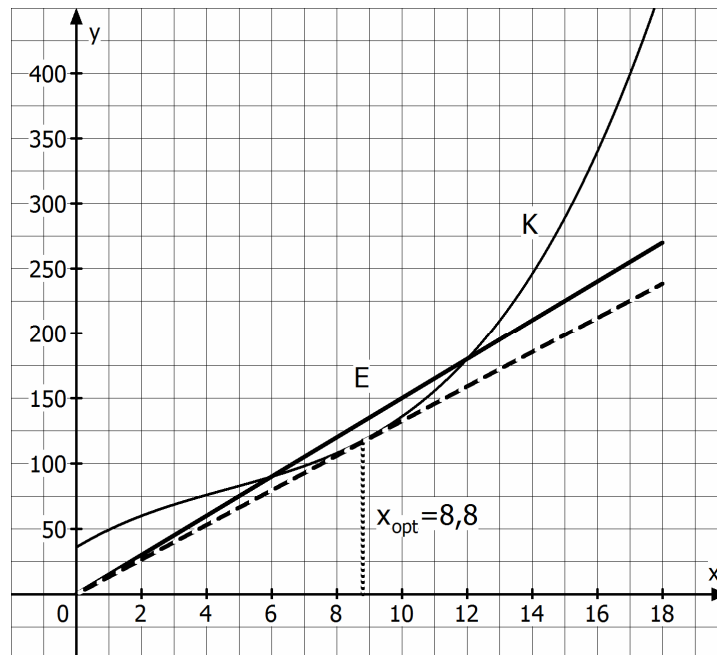
Als Schnittbedingung ergibt sich: $K(x) = E(x)$

Lösung mit dem GTR:



Die Nutzenschwelle ist bei $x = 6$ ME.

Schaubilder: (gestrichelte Gerade gehört zu Aufgabe 7.2.2)



7.2.2

In das Schaubild in 7.2.1 ist auch die Gerade gestrichelt eingezeichnet, die durch den Ursprung verläuft und das Schaubild K berührt.

Die Stückkosten werden an der Berührstelle $x = 8,8$ ME minimal.

Rechnerische Ermittlung des Minimums der Stückkosten:

Die Stückkostenfunktion lautet $k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{4}x + 15 + 36x^{-1}$

Es gilt $k'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4} - 36x^{-2} = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4} - \frac{36}{x^2}$ und $k''(x) = \frac{1}{4} + 72x^{-3} = \frac{1}{4} + \frac{72}{x^3}$

Hinreichende Bedingung für minimale Stückkosten: $k'(x) = 0$ und $k''(x) > 0$

$$\begin{aligned} k'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{4}x - \frac{7}{4} - \frac{36}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^2 - 36 = 0 \end{aligned}$$

Mit dem GTR ergibt sich als einzige Lösung $x = 8,84$.

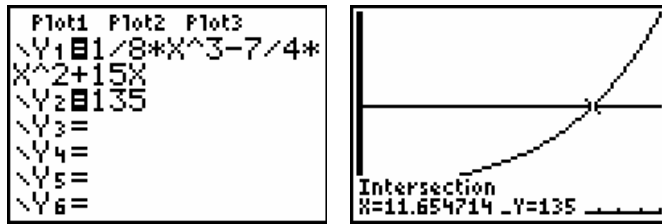
Da $k''(8,84) > 0$ ist, werden die Stückkosten für $x = 8,84$ ME minimal (was zeichnerisch schon ermittelt wurde).

Die minimalen Stückkosten betragen $k(8,84) = 13,37$ GE.

7.2.3

Die variable Kostenfunktion lautet $K_v(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 15x$

Mit dem GTR ergibt sich:



Die Bedingung $K(x) \leq 135$ ist erfüllt für $x \leq 11,65$ ME.

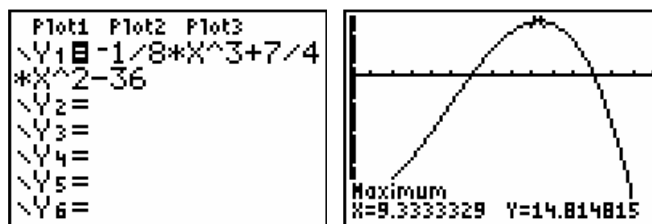
Das heißt, es dürfen bei dieser Vorgabe maximal 11,65 ME produziert werden.

7.2.4

Die Gewinnfunktion lautet $G(x) = E(x) - K(x) = 15x - \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 15x + 36 \right)$

$$\Rightarrow G(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{7}{4}x^2 - 36$$

Bestimmung des Maximums von $G(x)$ mit dem GTR:



Bei einer Produktionsmenge von $x = 9,3$ ME ist der maximale Gewinn 14,81 GE.

7.2.5

Variante A:

Die bisherigen Fixkosten betragen $K(0) = 36$ GE.

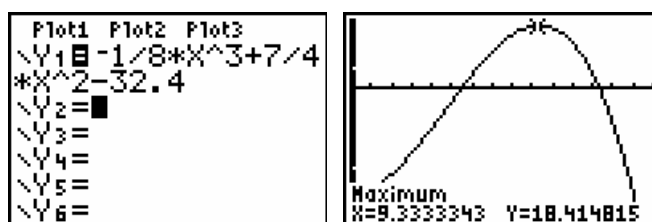
Bei Senkung der Fixkosten um 10% bleiben $36 \cdot 0,9 = 32,4$ GE als Fixkosten übrig.

Die neue Kostenfunktion lautet $K_A(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 15x + 32,4$

Die Gewinnfunktion lautet $G_A(x) = E(x) - K_A(x) = 15x - \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 15x + 32,4 \right)$

$$\Rightarrow G_A(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{7}{4}x^2 - 32,4$$

Bestimmung des Maximums von $G_A(x)$ mit dem GTR:



Bei Variante A ist bei einer Produktionsmenge von $x = 9,3$ ME ist der maximale Gewinn 18,41 GE.

Variante B:

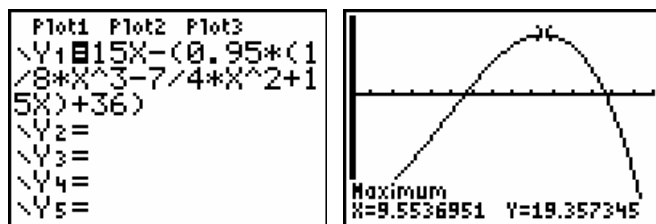
Die bisherigen variablen Kosten betragen $K_v(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 15x$

Bei Senkung der variablen Kosten um 5% ergeben sich $K_{vB} = 0,95 \cdot \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 15x\right)$

Die neue Kostenfunktion lautet $K_B(x) = 0,95\left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 15x\right) + 36$

Die Gewinnfunktion lautet $G_B(x) = E(x) - K_B(x) = 15x - \left(0,95 \cdot \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 15x\right) + 36\right)$

Bestimmung des Maximums von $G_B(x)$ mit dem GTR:



Bei Variante B ist bei einer Produktionsmenge von $x = 9,55$ ME ist der maximale Gewinn 19,36 GE.

Da der maximale Gewinn bei Variante B größer ist als bei Variante A ist Variante B günstiger.

