

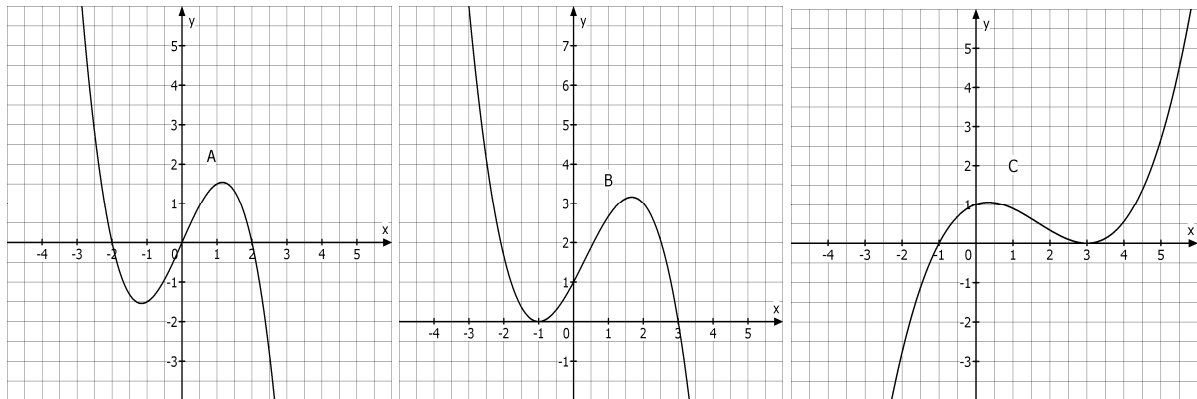
## Hauptprüfung 2007 Aufgabe 1

1.1

Von einer Funktion  $g$  kennt man den Funktionsterm nur teilweise.

Man weiß:  $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + bx^2 + cx + 1$ .

Es ist bekannt, dass zwei der dargestellten Kurven A, B und C nicht Schaubild von  $g$  sein können. Begründen Sie, welche dies sind. (4 Punkte)



1.2

Geben Sie den Term einer Funktion an, deren Schaubild mit der Kurve B im gezeichneten Abschnitt übereinstimmt. (4 Punkte)

Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  hat das Schaubild  $K_f$ .

1.3

Bestimmen Sie die exakten Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von  $K_f$ . (6 Punkte)

1.4

Die Tangente im Punkt  $P(0/1)$  an  $K_f$  heißt  $t$ .

Das Schaubild  $K_f$  und  $t$  haben einen weiteren gemeinsamen Punkt  $Q$ .

Berechnen Sie dessen Koordinaten. (5 Punkte)

1.5

Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung  $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 1$ .

Welchen Inhalt hat die Fläche, die von  $K_f$  und der Parabel im ersten Quadranten eingeschlossen wird? (5 Punkte)

1.6

Die Kurve C in obiger Abbildung ist das Schaubild der Ableitungsfunktion  $h'$  einer Funktion  $h$ , deren Schaubild durch den Ursprung geht.

Skizzieren Sie das Schaubild von  $h$  zusammen mit der Kurve C in ein Koordinatensystem. (6 Punkte)

-----  
30 Punkte

## Lösung Hauptprüfung 2007 Aufgabe 1

### 1.1

Es gilt  $g(0) = 1$ , das heißt der Punkt  $P(0/1)$  liegt auf dem Schaubild.

Da Kurve A durch den Ursprung verläuft, kann dies nicht das Schaubild von  $g$  sein.

Für  $x \rightarrow \infty$  strebt  $g(x) \rightarrow -\infty$  (Betrachtung des höchsten Grades)

Bei der Kurve C strebt das Schaubild für  $x \rightarrow \infty$  gegen  $+\infty$ . Kurve C kann daher auch nicht das Schaubild von  $g$  sein.

### 1.2

Es handelt sich um eine Funktion dritten Grades.

#### 1. Lösungsmöglichkeit:

Ansatz:  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  mit  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen:

$f(0) = 1 \Rightarrow d = 1$  (Schaubild geht durch  $P(0/1)$ )

$f(-1) = 0 \Rightarrow -a + b - c + d = 0$  (Schaubild geht durch  $R(-1/0)$ )

$f(3) = 0 \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = 0$  (Schaubild geht durch  $S(3/0)$ )

$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$  (bei  $x = -1$  befindet sich eine waagrechte Tangente)

Lösung des Gleichungssystems mit dem GTR ergibt:  $a = -\frac{1}{3}$ ,  $b = \frac{1}{3}$ ,  $c = \frac{5}{3}$ ,  $d = 1$

Funktionsgleichung der Kurve B:  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1$

#### 2. Lösungsmöglichkeit:

Da sämtliche Nullstellen der Funktion bekannt sind, kann der Funktionsgleichungsansatz auch als Linearfaktorzerlegung  $f(x) = a \cdot (x+1)^2 \cdot (x-3)$  erfolgen.

Mit  $f(0) = 1$  ergibt sich  $1 = a \cdot 1 \cdot (-3) \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$  also  $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot (x+1)^2 \cdot (x-3)$

### 1.3

Ableitungen:

$$f'(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \quad ; \quad f''(x) = -2x + \frac{2}{3} \quad ; \quad f'''(x) = -2$$

Berechnung der Extrempunkte:

Hinreichende Bedingung:  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) \neq 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{20}{3}}}{-2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \frac{8}{3}}{-2} \Rightarrow x = -1 \text{ oder } x = \frac{5}{3}$$

$$f''(-1) > 0 \Rightarrow \text{TP}(-1/f(-1)) = \text{TP}(-1/0)$$

$$f''(\frac{5}{3}) < 0 \Rightarrow \text{HP}(\frac{5}{3}/f(\frac{5}{3})) = \text{HP}(\frac{5}{3}/\frac{256}{81})$$

Berechnung der Wendepunkte:

Hinreichende Bedingung:  $f''(x) = 0$  und  $f'''(x) \neq 0$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -2x + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$f'''(\frac{1}{3}) = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{WP}(\frac{1}{3} / f(\frac{1}{3})) = \text{WP}(\frac{1}{3} / \frac{128}{81})$$

#### 1.4

Tangentengleichung in P(0/1):

Die Tangente in P besitzt die Steigung  $f'(0) = \frac{5}{3}$

Punkt-Steigungsform:  $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

Einsetzen der Werte liefert:  $y - 1 = \frac{5}{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = \frac{5}{3}x + 1$  ist die Tangentengleichung in P

Schnittpunkt Q der Tangente und des Schaubildes von f:

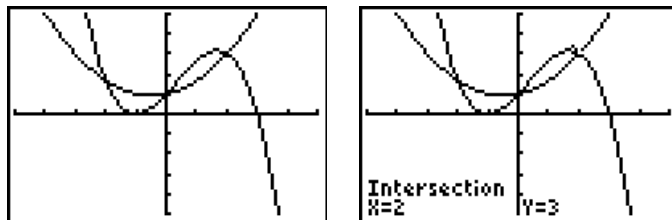
$$-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1 = \frac{5}{3}x + 1$$

$$-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 \cdot (-x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = 1$$

Die Lösung  $x = 0$  entspricht dem Punkt P, das heißt es gilt  $Q(1/f(1)) = Q(1/\frac{8}{3})$

#### 1.5

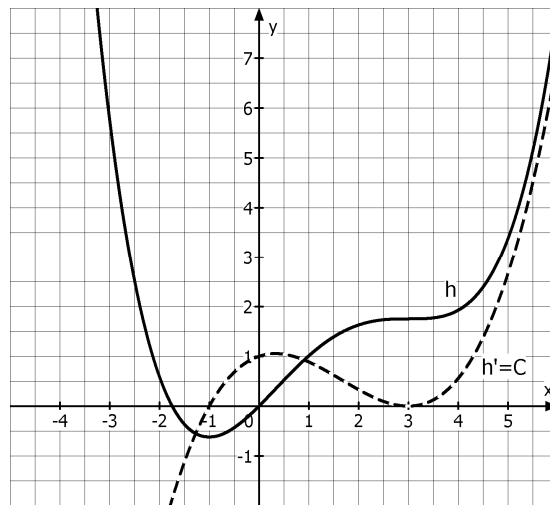
Skizze der Parabel und  $f(x)$  mit dem GTR:



Die Fläche im 1. Quadrant hat die linke Grenze  $x = 0$  und die rechte Grenze  $x = 2$ .

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 (f(x) - p(x)) dx = \int_0^2 \left( -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1 - \frac{5}{3}x - 1 \right) dx = \int_0^2 \left( -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 \right) dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{9}x^3 \right]_0^2 = -\frac{1}{12} \cdot 16 + \frac{1}{9} \cdot 8 = -\frac{4}{3} + \frac{8}{9} = -\frac{4}{9}
 \end{aligned}$$

1.6



Bei  $x = -1$  besitzt  $h$  einen Tiefpunkt, da  $h'$  dort eine Nullstelle mit VZW von  $-$  nach  $+$  besitzt.  
 Bei  $x = 3$  besitzt  $h$  einen Sattelpunkt, da  $h'$  dort eine Nullstelle ohne VZW besitzt.  
 Bei  $x \approx 0,3$  besitzt  $h$  einen Wendepunkt, da  $h'$  dort einen Extrempunkt besitzt.  
 Das Schaubild von  $h$  geht gemäß Vorgabe durch den Ursprung.