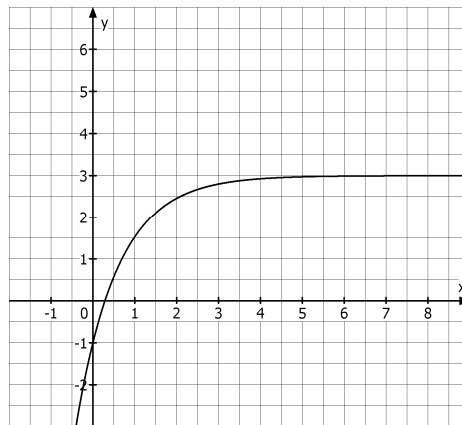


Hauptprüfung 2007 Aufgabe 2

2.1

Zu dem untenstehenden Schaubild gehört die Funktionsgleichung $y = a \cdot e^{-x} + b$.
Bestimmen Sie a und b .



(4 Punkte)

2.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0,5e^{0,5x} - x - 3$; $x \in \mathbb{R}$

Ihr Schaubild ist K .

Begründen Sie, wieso K weder Hoch- noch Wendepunkte hat.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Tiefpunktes.

Die Gerade g hat die Gleichung $y = -x - 3$. Zeichnen Sie K und g in ein geeignetes Koordinatensystem.

Für welche Werte ist die Differenz der y -Werte zwischen den Punkten auf K und der Geraden g kleiner als 0,01 ? (11 Punkte)

2.3

Tragen Sie einen Punkt in das Koordinatensystem von 2.2 ein, von dem aus zwei Tangenten an K gelegt werden können, und zeichnen Sie diese Tangenten ein.

Tragen Sie zusätzlich jeweils einen Punkt ein, für den es nur eine bzw. keine Tangente an K gibt. (6 Punkte)

2.4

Die Gerade h hat die Gleichung $y = -x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

Berechnen Sie den x -Wert des Schnittpunktes von h und K exakt. (3 Punkte)

2.5

Die Fläche A_1 wird von dem Schaubild K , der Geraden h und der y -Achse begrenzt; die Fläche A_2 wird von der x -Achse, der Geraden h , dem Schaubild K und der Geraden mit der Gleichung $x = 5$ begrenzt.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der beiden Flächen auf zwei Dezimalstellen genau. (6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2007 Aufgabe 2

2.1

Das Schaubild besitzt die waagrechte Asymptote $y = 3$ für $x \rightarrow \infty$.

Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} (a \cdot e^{-x} + b) = b$ und damit gilt $b = 3$.

Das Schaubild enthält den Punkt $P(0/-1)$.

Einsetzen der Koordinaten in die Funktionsgleichung: $-1 = a \cdot e^0 + b \Leftrightarrow -1 = a + 3 \Leftrightarrow a = -4$

Die Funktionsgleichung lautet $y = -4 \cdot e^{-x} + 3$

2.2

Ableitungen:

$$f(x) = 0,5e^{0,5x} - x - 3$$

$$f'(x) = 0,25e^{0,5x} - 1 \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}e^{0,5x}$$

Berechnung der Extrempunkte:

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 0,25e^{0,5x} - 1 = 0 \Rightarrow 0,5x = \ln 4 \Rightarrow x = 2 \ln 4$$

$$f''(2 \ln 4) > 0 \Rightarrow \text{TP}(2 \ln 4 / f(2 \ln 4)) = \text{TP}(2 \ln 4 / -3,77)$$

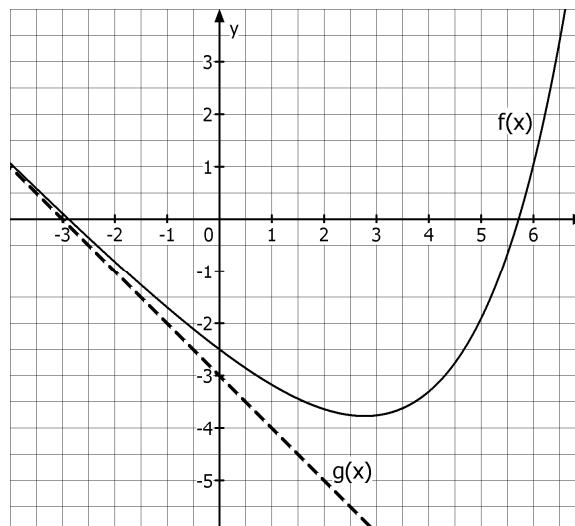
Damit existiert kein Hochpunkt.

Berechnung der Wendepunkte:

Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{8}e^{0,5x} = 0 \quad \text{diese Gleichung ist nicht lösbar, daher existieren keine Wendepunkte}$$

Skizze:



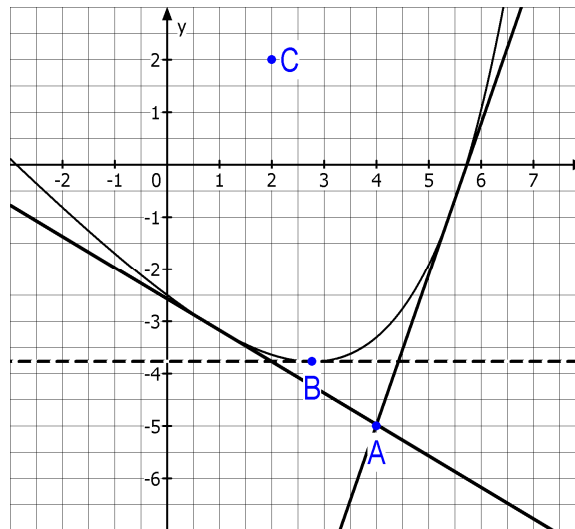
Gesucht ist der x-Wert, für den gilt: $f(x) - g(x) < 0,01$

$$\Leftrightarrow 0,5e^{0,5x} - x - 3 - (-x - 3) < 0,01$$

$$\Leftrightarrow e^{0,5x} < 0,02 \Leftrightarrow x < 2\ln 0,02 \approx -7,82$$

Für $x < -7,82$ ist die Differenz der y-Werte kleiner als 0,01.

2.3



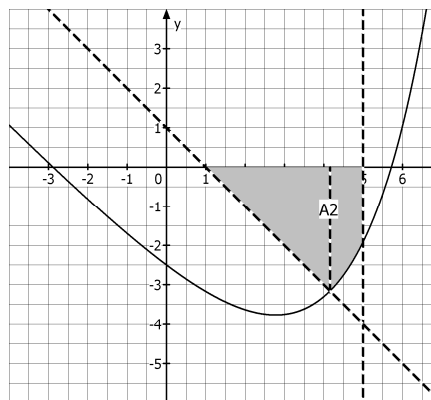
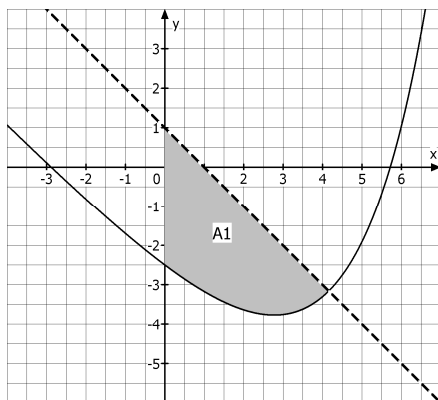
Vom Punkt A aus können zwei Tangenten an das Schaubild angelegt werden.
 Vom Punkt B aus kann eine Tangente an das Schaubild angelegt werden.
 Vom Punkt C aus kann keine Tangente an das Schaubild angelegt werden.

2.4

Schnittpunkt von h und K ergibt sich durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen:

$$f(x) = h(x) \Rightarrow 0,5e^{0,5x} - x - 3 = -x + 1 \Leftrightarrow 0,5e^{0,5x} = 4 \Leftrightarrow x = 2 \cdot \ln 8 \approx 4,16$$

2.5



$$A_1 = \int_0^{2\ln 8} (h(x) - f(x))dx = \int_0^{2\ln 8} (-x + 1 - 0,5e^{0,5x} + x + 3)dx = \int_0^{2\ln 8} (4 - 0,5e^{0,5x})dx$$

$$= \left[4x - e^{0,5x} \right]_0^{2\ln 8} = 8\ln 8 - 8 - (0 - 1) = 8\ln 8 - 7 = 9,64 \text{ FE}$$

$$A_2 = \int_1^{2\ln 8} (0 - h(x))dx + \int_{2\ln 8}^5 (0 - f(x))dx = \int_1^{2\ln 8} (x - 1)dx + \int_{2\ln 8}^5 (-0,5e^{0,5x} + x + 3)dx$$

$$= \left[0,5x^2 - x \right]_1^{2\ln 8} + \left[-e^{0,5x} + 0,5x^2 + 3x \right]_{2\ln 8}^5 = 4,99 + 2,19 = 7,18 \text{ FE}$$