

Hauptprüfung 2007 Aufgabe 3

3.1

Gegeben sind die Funktionen f , g und h mit

$$f(x) = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$g(x) = \sin(2x) + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$h(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Ihre Schaubilder sind K_f , K_g und K_h .

Beschreiben Sie, wie K_f , K_g und K_h aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = \sin(x)$

hervorgehen. (6 Punkte)

3.2

Skizzieren Sie K_g .

Es gibt unendlich viele Stellen, an denen die Funktionswerte von g minimal sind.

Bestimmen Sie diejenige exakt, die am nächsten bei Null liegt.

Erläutern Sie, wie sich die anderen Stellen aus dieser berechnen.

Geben Sie den Wertebereich von g an. (6 Punkte)

3.3

Das Schaubild K_g schließt im 2. Quadranten mit den Achsen eine Fläche ein.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche mit Hilfe einer Stammfunktion. (6 Punkte)

3.4

Zeigen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = -2x + \pi + 1$ Wendetangente an K_g

ist. (6 Punkte)

3.5

Die Gerade $x = u$ mit $0 \leq u \leq 16$ schneidet K_g im Punkt P und die Parabel mit der Gleichung

$y = x^2$ im Punkt Q . Bestimmen Sie die maximale Länge der Strecke PQ .

(6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2007 Aufgabe 3

3.1

Die allgemeine Sinusfunktion lautet $y = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$

Schaubild von f:

Die Periode ist $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ (Periode wird gegenüber $y = \sin(x)$ verdoppelt)

Das Vorzeichen von a ist negativ, das heißt $y = \sin(x)$ wird an der x-Achse gespiegelt.

Die Amplitude lautet $|a| = \frac{1}{2}$, sie wird gegenüber $y = \sin(x)$ halbiert.

Da $d = 0$ und $c = 0$ ist, erfolgt keine Verschiebung in x- oder y-Richtung gegenüber $y = \sin(x)$

Schaubild von g:

Die Periode ist $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ (Periode wird gegenüber $y = \sin(x)$ halbiert)

Die Amplitude lautet $a = 1$, keine Änderung gegenüber $y = \sin(x)$

Es gilt $d = 1$, das heißt sie ist gegenüber $y = \sin(x)$ um 1 nach oben verschoben

Es gilt $c = 0$, das heißt keine Verschiebung in x-Richtung gegenüber $y = \sin(x)$

Schaubild von h:

Die Periode ist $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$, also gleiche Periode wie $y = \sin(x)$.

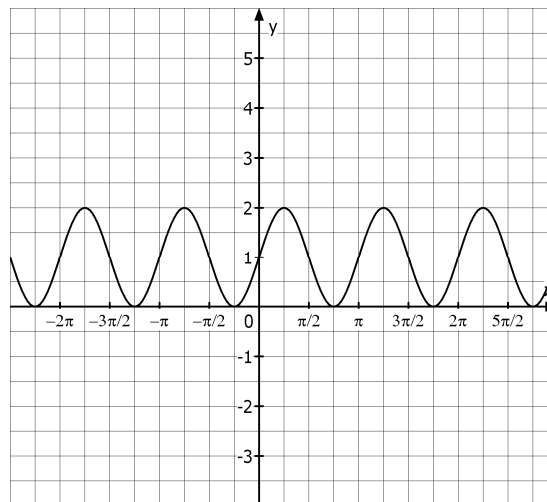
Das Vorzeichen von a ist negativ, das heißt, $y = \sin(x)$ wird an der x-Achse gespiegelt.

Die Amplitude lautet $|a| = 1$, also gleiche Amplitude wie $y = \sin(x)$.

Es gilt $d = 0$, also keine Verschiebung in y-Richtung gegenüber $y = \sin(x)$.

Es gilt $c = -\frac{\pi}{4}$, also Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts gegenüber $y = \sin(x)$.

3.2



Ableitungen:

$$g(x) = \sin(2x) + 1 \Rightarrow g'(x) = 2 \cdot \cos(2x) \Rightarrow g''(x) = -4 \cdot \sin(2x) \Rightarrow g'''(x) = -8 \cos(2x)$$

Berechnung des Minimums:

Hinreichende Bedingung: $g'(x) = 0$ und $g''(x) > 0$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 2 \cos(2x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = 0$$

$$\Rightarrow 2x = -\frac{3}{2}\pi \text{ oder } 2x = -\frac{1}{2}\pi \text{ oder } 2x = \frac{1}{2}\pi \text{ oder } 2x = \frac{3}{2}\pi$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{4}\pi \text{ oder } x = -\frac{1}{4}\pi \text{ oder } x = \frac{1}{4}\pi \text{ oder } x = \frac{3}{4}\pi$$

Da $g''(-\frac{1}{4}\pi) > 0$ ist, ist das gesuchte Minimum bei $x = -\frac{\pi}{4}$, also $TP(-\frac{\pi}{4} | 0)$.

Berechnung der restlichen Minimalstellen:

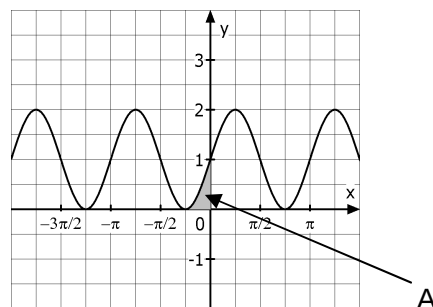
Da das Schaubild von g die Periode π besitzt und die Tiefpunkte auch den Abstand π besitzen, ergeben sich die x -Werte der restlichen Minimalstellen durch die Formel

$$x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k \text{ ist eine beliebige ganze Zahl, also } k \in \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\})$$

Wertebereich von g :

Aus dem Schaubild kann man ablesen, dass das Schaubild von g alle y -Werte im Intervall $0 \leq y \leq 2$ annehmen kann.

3.3

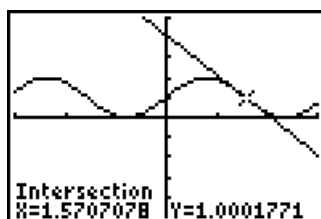


Es gilt

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 g(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (\sin(2x) + 1) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) + x \right]_{-\frac{\pi}{4}}^0 = -\frac{1}{2} \cos(0) + 0 - \left(-\frac{1}{2} \cos(-\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \approx 0,29 \text{ FE}
 \end{aligned}$$

3.4

Ermittlung des gemeinsamen Punktes der Gerade mit dem Schaubild von g mit dem GTR



Die Berührstelle lautet $x \approx 1,57$

Berechnung des Wendepunktes von $g(x)$:

Hinreichende Bedingung: $g''(x) = 0$ und $g'''(x) \neq 0$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow -4 \sin(2x) = 0 \Rightarrow \sin(2x) = 0$$

$$\Rightarrow 2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$$

(es gäbe für die Lösung der Gleichung auch noch weitere Möglichkeiten, z.B. $x = 0$; da jedoch die Berührstelle $x = 1,57$ ergeben muss, ist $x = \frac{\pi}{2}$ die einzige Möglichkeit)

$$g'''(\frac{\pi}{2}) = 8 \neq 0 \Rightarrow \text{WP}(\frac{\pi}{2} / 1)$$

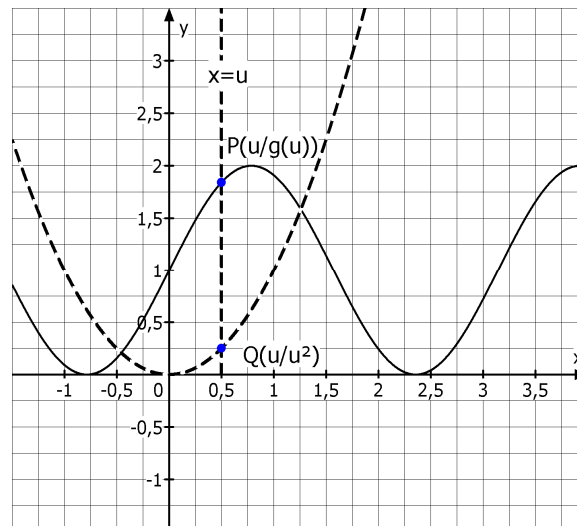
Kontrolle, ob die gegebene Gerade eine Wendetangente ist:

Kontrolle ob der Wendepunkt auf der Geraden liegt: $1 = -2 \cdot \frac{\pi}{2} + \pi + 1$ wahre Aussage

Berechnung der Steigung im Wendepunkt: $g'(\frac{\pi}{2}) = 2 \cdot \cos(\pi) = -2$

Da die gegebene Gerade auch die Steigung $m = -2$ besitzt, ist die Gerade die Wendetangente.

3.5

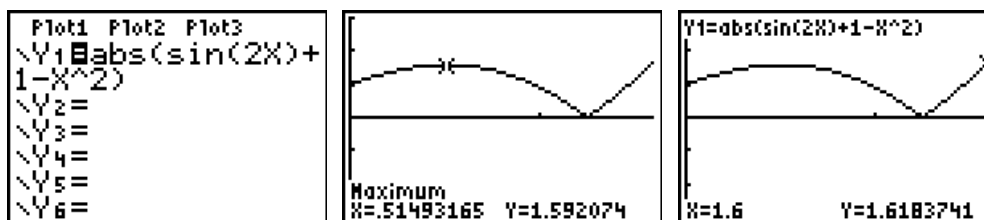


Es gilt: $d(u) = \overline{PQ} = |g(u) - u^2| = |\sin(2u) + 1 - u^2|$

Gesucht ist das absolute Maximum der Funktion $d(u)$ im Intervall $0 \leq u \leq 1,6$.

Die Betragsstriche sind deshalb notwendig, weil der Schnittpunkt der Parabel mit der Sinuskurve innerhalb des betrachteten Intervalls $0 \leq u \leq 1,6$ liegt und somit links vom Schnittpunkt die Sinuskurve oberhalb der Parabel liegt und rechts vom Schnittpunkt die Parabel oberhalb liegt.

Ermittlung mit dem GTR:



Der y-Wert ist am Rand bei $u = 1,6$ am größten.
Daher wird die Funktion $d(u)$ maximal für $u = 1,6$ mit $d(1,6) = 1,618$.

Die maximale Länge der Strecke $\overline{PQ}$ beträgt daher 1,618 LE.