

Hauptprüfung 2007 Aufgabe 4

Ein dreieckiges Sonnensegel mit den Ecken A, B und C wird mit Hilfe von Stangen aufgespannt. Die Stangen stehen senkrecht auf der $x_1 - x_2$ - Ebene (Boden) eines dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems.

Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht der Strecke 1 m .

Stange 1 ist 3m hoch und steht im Ursprung, ihr Endpunkt ist A.

Stange 2 ist 3,5m hoch und steht in (4,5/0/0), ihr Endpunkt ist B.

Stange 3 ist 2m hoch und steht in (0/3/0), ihr Endpunkt ist C.

4.1

Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B und C an.

Zeichnen Sie A,B,C und das Segel in ein räumliches Koordinatensystem ein.

(x_2 - und x_3 - Achse mit 1 LE = 1 cm; x_1 - Achse mit dem Schrägwinkel 45° und

$$1 \text{ LE} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ cm}) \quad (4 \text{ Punkte})$$

4.2

Prüfen Sie, ob das Sonnensegel rechtwinklig ist. (4 Punkte)

4.3

Gegeben ist der Punkt D(1,5/2/2,5).

Zeigen Sie, dass die Strecke AD die Höhe des Dreiecks ABC ist.

Welche Höhe über dem Boden hat D ? (4 Punkte)

4.4

Wie groß ist der Flächeninhalt des Segels ? (4 Punkte)

4.5

Ausgehend vom Punkt E(9/12/0) wird ein Seil in Richtung A gespannt. Zeigen Sie, dass die Gerade durch A und E die Seite BC schneidet und bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes.

Die Gerade, die durch senkrechte Projektion der Geraden durch A und E auf die $x_1 - x_2$ - Ebene entsteht, schließt mit der Geraden durch A und E einen Winkel ein.

Bestimmen Sie die Größe dieses Winkels.

Zeichnen Sie diesen Winkel in Ihre Zeichnung aus 4.1 ein. (6 Punkte)

4.6

In Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ scheinen parallele Sonnenstrahlen auf das Segel und

werfen einen Schatten auf den Boden (x_1 - und x_2 - Ebene).

Der Punkt A wirft den Schatten A', B hat B' und C hat C' als Schatten. Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte A', B' und C' des Schattens an. Zeichnen Sie die Punkte und Schatten in das Schaubild aus 4.1 ein. Schraffieren Sie die Schattenfläche.

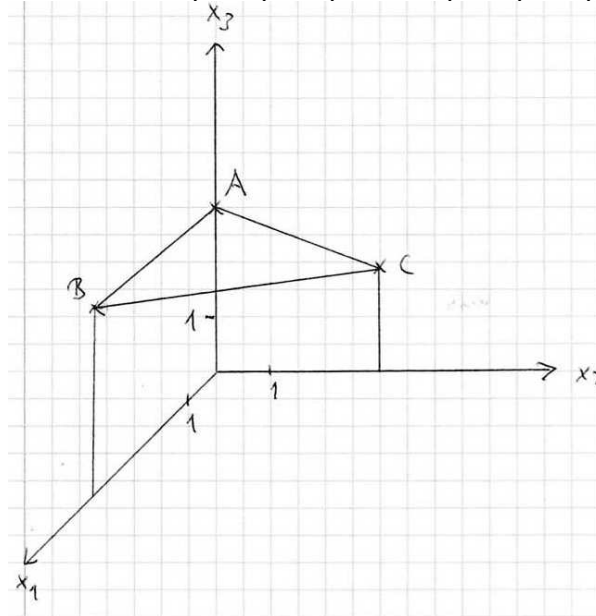
(7 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2007 Aufgabe 4

4.1

Die Koordinaten der Punkte lauten: A(0/0/3) ; B(4,5/0/3,5) ; C(0/3/2)



4.2

Prüfung der Rechtwinkligkeit des Segels:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4,5 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 0,5 \cdot (-1) = -0,5 \neq 0, \text{ also nicht rechtwinklig im Punkt A}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4,5 \cdot (-4,5) + 0 \cdot 3 + 0,5 \cdot (-1,5) = -21 \neq 0, \text{ also nicht rechtwinklig im Punkt B}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \cdot (-4,5) + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1,5) = 10,5 \neq 0, \text{ also nicht rechtwinklig im Punkt C}$$

Das Dreieck ABC ist nicht rechtwinklig.

4.3

Zunächst ist zu zeigen, dass der Punkt D auf der Geraden BC liegt.

$$\text{Geradengleichung durch B und C: } \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

Punktprobe von D(1,5/2/2,5): $\begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ für alle 3 Zeilen gilt $r = \frac{2}{3}$

Damit liegt der Punkt D auf der Geraden BC.

Nun ist noch zu zeigen, dass $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ senkrecht auf $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ steht.

Es gilt $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 1,5 \cdot (-4,5) + 2 \cdot 3 + (-0,5) \cdot (-1,5) = 0$ und damit ist die Orthogonalität gezeigt.
Damit ist die Strecke AD die Höhe des Dreiecks ABC.

Die Höhe von D über dem Boden stellt der x_3 -Wert dar, also Höhe = 2,5 m.

4.4

Fläche des Segels = Fläche des Dreiecks ABC =

$$\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-4,5)^2 + 3^2 + (-1,5)^2} \cdot \sqrt{1,5^2 + 2^2 + (-0,5)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{31,5} \cdot \sqrt{6,5} \approx 7,15 \text{ FE}$$

4.5

Bestimmung des Schnittpunktes der beiden Geraden:

Gleichung der Geraden durch AE: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$

Gleichung der Geraden durch BC: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4,5 \\ 3 \\ -1,5 \end{pmatrix}$

$$9s = 4,5 - 4,5r$$

Gleichsetzen ergibt folgendes Gleichungssystem: $12s = 3r$

$$3 - 3s = 3,5 - 1,5r$$

Aus (2) folgt $r = 4s$

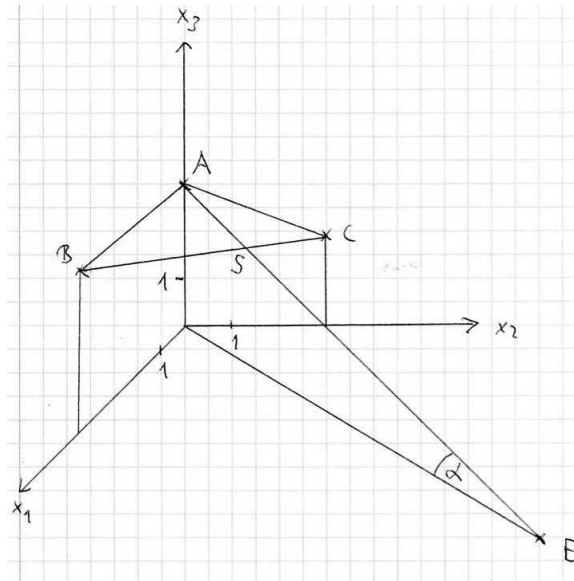
Eingesetzt in die 1. Zeile: $9s = 4,5 - 4,5 \cdot 4s \Leftrightarrow 27s = 4,5 \Rightarrow s = \frac{1}{6}$ und damit $r = \frac{2}{3}$

Probe mit der 3. Zeile führt zu wahrer Aussage.

Einsetzen von $s = \frac{1}{6}$ in die Geradengleichung durch AE ergibt Schnittpunkt $S(\frac{3}{2} / \frac{5}{2})$

Berechnung des Winkels:

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EO}|}{|\overrightarrow{EA}| \cdot |\overrightarrow{EO}|} = \frac{\begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{81+144+9} \cdot \sqrt{81+144}} = \frac{225}{\sqrt{234} \cdot 15} \Rightarrow \alpha = 11,3^\circ$$



4.6

Berechnung des Schattenpunktes A':

Hilfsgerade durch A mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit der $x_1 - x_2$ -Ebene: $x_3 = 0 \Rightarrow 3 - r = 0 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow A'(0/-3/0)$

Berechnung des Schattenpunktes B':

Hilfsgerade durch B mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit der $x_1 - x_2$ -Ebene: $x_3 = 0 \Rightarrow 3,5 - r = 0 \Rightarrow r = 3,5 \Rightarrow B'(4,5/-3,5/0)$

Berechnung des Schattenpunktes C':

Hilfsgerade durch C mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit der $x_1 - x_2$ -Ebene: $x_3 = 0 \Rightarrow 2 - r = 0 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow C'(0/1/0)$

