

Hauptprüfung 2007 Aufgabe 5

5.1

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 4 \\ 5x_1 & +6x_2 & +7x_3 & = 8 \\ 6x_1 & +8x_2 & +10x_3 & = 12 \end{array}$$

Berechnen Sie den allgemeinen Lösungsvektor des linearen Gleichungssystems.

(6 Punkte)

5.2

Geben Sie ein eindeutig lösbares Gleichungssystem an, bei dem die ersten beiden Gleichungen mit den ersten beiden Gleichungen des Gleichungssystems aus 5.1 übereinstimmen. Bestimmen Sie den zugehörigen Lösungsvektor. (4 Punkte)

5.3

Wie kann man die 3. Gleichung des Gleichungssystems aus 5.1 verändern, so dass das neue System keine Lösung hat ? Begründen Sie. (2 Punkte)

5.4

Bestimmen Sie a,b,c und d, wenn gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 3 \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & c \\ d & 29 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ Punkte})$$

5.5

Lösen Sie die Gleichung $\vec{x} = A \cdot \vec{x} + \vec{y}$ nach $\vec{x}$ auf.

(3 Punkte)

5.6

Die Produktion eines Unternehmens erfolgt in den Werken V und W. Die beiden Werke sind nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten. Bekannt ist die Technologiematrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

5.6.1

Die Werke planen eine Gesamtproduktion von je 100 Mengeneinheiten. Wie viele Mengeneinheiten können von jedem Werk an den Markt abgegeben werden ? Geben Sie die zugehörige Input-Output-Tabelle an. (6 Punkte)

5.6.2

Aus wirtschaftlichen Gründen können die beiden Werke insgesamt nur 100 Mengeneinheiten am Markt absetzen. Die Kosten für die Produktion einer Einheit sind in beiden Werken gleich. Wie viel soll jedes der Werke produzieren, wenn minimale Kosten angestrebt werden?

(5 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2007 Aufgabe 5

5.1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-5) \quad \leftarrow \\ | \cdot (-6) \quad \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{array} \right) \cdot (-1) \quad \leftarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Aufgrund der Nullzeile gibt es unendlich viele Lösungen.

Es sei $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$

Aus Zeile 2 folgt $-4x_2 - 8t = -12 \Rightarrow x_2 = 3 - 2t$

Aus Zeile 1 folgt $x_1 + 2(3 - 2t) + 3t = 4 \Rightarrow x_1 = -2 + t$

Allgemeiner Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2+t \\ 3-2t \\ t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

5.2

Aus den ersten beiden Gleichungen des Gleichungssystems ergeben sich nach der Umformung die ersten zwei Zeilen der Matrix.

Damit das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt, wird zum Beispiel als dritte Zeile $x_3 = 0$ angefügt.

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ \text{Das neue Gleichungssystem sieht dann so aus: } & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 7x_3 & = & 8 \\ & & & & & x_3 & = & 0 \end{array}$$

bzw. umgeformt in Stufenform $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$

Die eindeutige Lösung lautet nun $x_3 = 0$, $x_2 = 3$, $x_1 = -2$ also $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5.3

Damit das Gleichungssystem keine Lösung hat, muss als 3. Gleichung ein Widerspruch zu den ersten beiden Gleichungen erreicht werden. Dies geschieht zum Beispiel dadurch, dass die linke Seite der ersten Gleichung abgeschrieben wird und nur die Ergebniszahl auf der rechten Seite geändert wird.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ \text{Beispiel: } 5x_1 & + & 6x_2 + 7x_3 = 8 \\ x_1 & + & 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{array}$$

5.4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 3 \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+8 & 3+2b \\ 3a+16 & 9+4b \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{Nun soll gelten: } a+8=10 \Rightarrow a=2 \\ 9+4b=29 \Rightarrow b=5 \\ 3+2b=c \Rightarrow 3+2 \cdot 5=c \Rightarrow c=13 \\ 3a+16=d \Rightarrow 3 \cdot 2+16=d \Rightarrow d=22 \end{array}$$

5.5

$$\vec{x} = A \cdot \vec{x} + \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} - A \cdot \vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow (E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y}$$

5.6.1

$$\text{Für den Produktionsvektor gilt } \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Die Leontief-Gleichung lautet $\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x}$ mit E = Einheitsmatrix

$$\text{Es gilt } \vec{y} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 \\ -0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Das Werk V kann 70 ME und das Werk W 40 ME an den Markt abgeben.

Input-Output-Tabelle:

	Werk V	Werk W	Markt	Produktion
Werk V	$0,1 \cdot 100 = 10$	$0,2 \cdot 100 = 20$	70	100
Werk W	$0,2 \cdot 100 = 20$	$0,4 \cdot 100 = 40$	40	100

5.6.2

$$\text{Es gilt } \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 100 - y_1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Da die Kosten in beiden Werken gleich ist, ist das Ziel, die Gesamtproduktion $x_1 + x_2$ zu minimieren.

$$\text{Aus der Leontief-Gleichung folgt: } \vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y} \text{ mit } (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,2 & 0,4 \\ 0,4 & 1,8 \end{pmatrix} \text{ (mit GTR)}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 & 0,4 \\ 0,4 & 1,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ 100 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2y_1 + 0,4(100 - y_1) \\ 0,4y_1 + 1,8(100 - y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8y_1 + 40 \\ -1,4y_1 + 180 \end{pmatrix}$$

$$\text{Für die Gesamtproduktion gilt } x_1 + x_2 = 0,8y_1 + 40 - 1,4y_1 + 180 = -0,6y_1 + 220$$

Damit die Gesamtproduktion minimiert wird, muss y_1 möglichst groß sein.

Da $y_1 \leq 100$ sein muss, ergibt sich für $y_1 = 100$ eine minimale Gesamtproduktion und damit minimale Kosten.

$$x_1 = 0,8 \cdot 100 + 40 = 120 \quad \text{das heißt das Werk V produziert 120 ME}$$

$$x_2 = -1,4 \cdot 100 + 180 = 40 \quad \text{das heißt das Werk W produziert 40 ME}$$