

Hauptprüfung 2007 Aufgabe 6

Bei einem Brettspiel soll durch Würfeln entschieden werden, um wie viel Felder eine Spielfigur vorwärts oder rückwärts gezogen wird.
Die Spielfigur bewegt sich dabei auf einem Kreis, der einmal umrundet werden muss. In einer Spielrunde sollen einmal zwei Würfel gleichzeitig geworfen werden.
Jeder Würfel hat eine rote, zwei gelbe und drei blaue Seiten.

6.1

Zeichnen Sie ein geeignetes Baumdiagramm für eine Spielrunde mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse an.

(6 Punkte)

6.2

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Kein Würfel zeigt rot.

B: Mindestens ein Würfel zeigt rot.

C: Genau ein Würfel zeigt rot.

D: Beide Würfel zeigen die gleiche Farbe.

(6 Punkte)

Den Farben entsprechend sollen die Spielfiguren Bewegungen ausführen:

Zeigen beide Würfel rot, so zieht die Spielfigur drei Felder zurück.

Zeigen beide Würfel die gleiche Farbe, außer rot, so rückt die Figur drei Felder vor.

Zeigt nur ein Würfel rot, muss die Figur auf dem Feld stehen bleiben.

Bei sonstigen verschiedenfarbigen Würfeln zieht die Spielfigur ein Feld vor.

6.3

Ist es gewährleistet, dass die Spielfiguren auf lange Sicht wenigstens ein Feld pro Spielrunde zurücklegen ?

(9 Punkte)

6.4

Besteht die Möglichkeit, dass eine Spielfigur in fünf Spielrunden 15 Felder zurücklegen kann ? Wenn ja, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit hierfür ?

(3 Punkte)

6.5

Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss die Spielfigur genau zweimal rückwärts gehen, wenn drei Spielrunden gespielt werden ?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss die Spielfigur genau zweimal rückwärts gehen, wenn vier Spielrunden gespielt werden ?

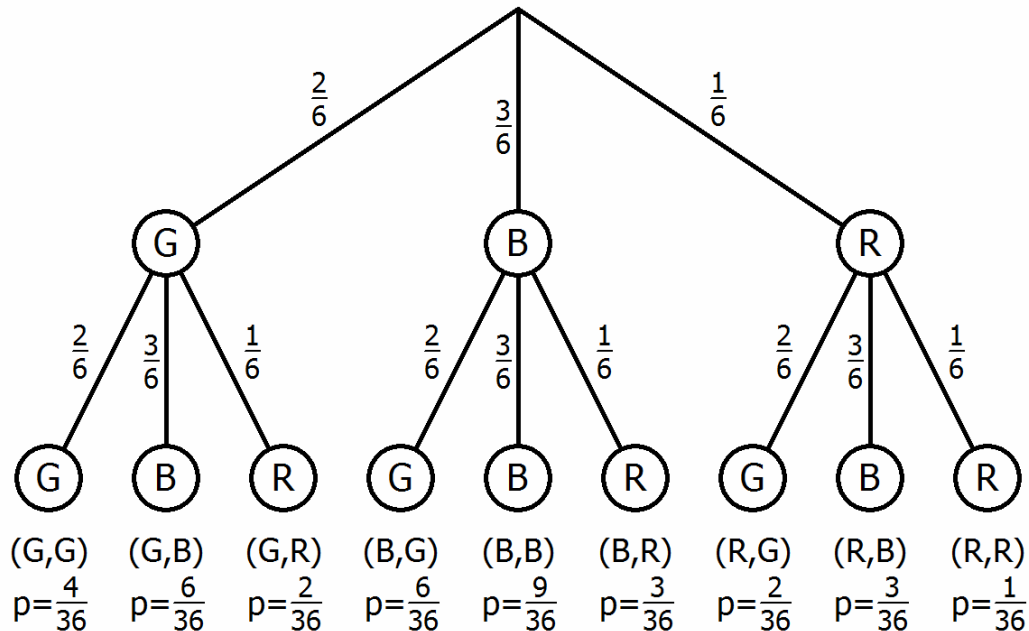
(6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2007 Aufgabe 6

6.1

Baumdiagramm:



Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse ergeben sich durch Multiplikation der Pfadwahrscheinlichkeiten, z.B. $P(RR) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

6.2

$$P(A) = P(GG) + P(BG) + P(GB) + P(BB) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{36}$$

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

$$P(C) = P(RG) + P(RB) + P(GR) + P(BR) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{5}{18}$$

$$P(D) = P(BB) + P(GG) + P(RR) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{7}{18}$$

6.3

X sei die Anzahl der Felder, um die die Spielfigur vor- bzw. zurückzieht. Es gelten folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X = -3) = P(RR) = \frac{1}{36} \quad P(X = 3) = P(BB) + P(GG) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}$$

$$P(X = 0) = P(BR) + P(RB) + P(GB) + P(RG) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$$

$$P(X = 1) = P(GB) + P(BG) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Der Erwartungswert von X gibt die durchschnittliche Anzahl der Felder an, die man in einer Spielrunde zurücklegt:

$$E(X) = -3 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{13}{36} + 0 \cdot \frac{5}{18} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 1$$

Damit ist gewährleistet, dass man auf lange Sicht mehr als ein Feld pro Spielrunde zurücklegt.

6.4

Die Möglichkeit besteht, und zwar dann, wenn die Spielfigur fünfmal hintereinander 3 Felder vorrückt.

Da $P(X = 3) = \frac{13}{36}$ (siehe Aufgabe 6.3) gilt

$$P(15 \text{ Felder in 5 Spielrunden}) = \left(\frac{13}{36}\right)^5 \approx 0,0061$$

6.5

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Spielfigur in einer Runde rückwärts gehen muss, beträgt

$$P(\text{Figur bewegt sich rückwärts}) = P(X = -3) = \frac{1}{36} \quad (\text{siehe 6.3})$$

$$P(\text{in 3 Runden genau zweimal rückwärts}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^2 \cdot \frac{35}{36} = 0,0023$$

Hinweis:

Der Faktor $\frac{35}{36}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Figur vorwärts zieht.

Der Faktor 3 entsteht dadurch, dass es 3 unterschiedliche Kombinationen gibt, wie die Figur in den 3 Spielrunden ziehen kann: (rü,rü,vo) oder (rü ; vo ; rü) oder (vo;rü;rü).

$$P(\text{in 4 Runden genau zweimal rückwärts}) = 6 \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^2 \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^2 = 0,0044$$

Hinweis:

Es gibt 6 unterschiedliche Kombinationen: (rü,rü,vo,vo) ; (rü,vo,rü,vo) ; (rü,vo,vo,rü) ; (vo,vo,rü,rü) ; (vo,rü,vo,rü) ; (vo,rü,rü,vo).