

Hauptprüfung 2007 Aufgabe 7

7.1

Um die Erlös- und Kostenfunktion zu ermitteln, macht ein Unternehmen folgende Angaben: Je Mengeneinheit (ME) wird ein Preis von 44 Geldeinheiten (GE) erzielt. Die Fixkosten betragen 280 GE. Werden 2 ME produziert, so entstehen Gesamtkosten in Höhe von 358 GE. Bei 12 ME betragen die variablen Stückkosten 14 GE je ME. Einen Gewinn von 10 GE erzielt das Unternehmen bei einer Ausbringungsmenge von 10 ME. Bestimmen Sie die Gleichungen der Gesamtkosten- und der Erlösfunktion unter der Voraussetzung, dass die Gesamtkostenfunktion eine ganzrationale Funktion 3. Grades ist und die Erlösfunktion eine lineare Funktion ist.

(7 Punkte)

7.2

Gegeben sind die Kostenfunktionen K und die Erlösfunktion E mit

$$K(x) = \frac{1}{4}x^3 - 6x^2 + 50x + 280 \quad \text{und} \quad E(x) = 44x$$

7.2.1

Prüfen Sie, ob das Unternehmen bei einer Produktion von 6 ME einen Gewinn erzielt.

Bei welchen Produktionsmengen produziert das Unternehmen kostendeckend ?

Welche Menge muss das Unternehmen produzieren, um maximalen Gewinn zu erzielen ?

Geben Sie diesen an.

(7 Punkte)

7.2.2

Zeichnen Sie das Schaubild von K und E in ein geeignetes Koordinatensystem.

(4 Punkte)

7.2.3

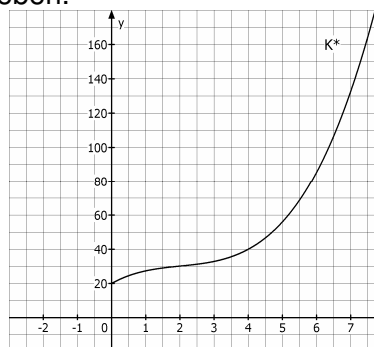
Bestimmen Sie grafisch und rechnerisch das Betriebsoptimum. Wie hoch muss der Preis für eine Mengeneinheit mindestens sein, damit das Unternehmen verlustfrei produzieren kann ?

(6 Punkte)

7.3

Ein anderes Unternehmen berechnet seine Gesamtkosten mit Hilfe der Funktion K^* .

Ihr Graph ist im Folgenden gegeben.



Zeichnen Sie in das Schaubild den Graphen einer linearen Erlösfunktion so ein, dass

zwischen Nutzenschwelle und Nutzengrenze ungefähr 3 ME liegen. Lesen Sie

Nutzenschwelle und Nutzengrenze aus dem Schaubild ab. Welcher Preis wird dann je

Mengeneinheit verlangt ?

(6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2007 Aufgabe 7

7.1

Ansatz für lineare Erlösfunktion: $E(x) = p \cdot x$

Da je ME ein Preis von 44 GE erzielt wird, gilt $p = 44$ und damit $E(x) = 44x$

Ansatz für Kostenfunktion: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Variable Stückkosten: $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = ax^2 + bx + c$

Bedingungen:

$K(0) = 280 \Rightarrow d = 280$ (Fixkosten betragen 280 GE)

$K(2) = 358 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 358$ (bei 2 ME entstehen Gesamtkosten in Höhe von 358 GE)

$k_v(12) = 14 \Rightarrow 144a + 12b + c = 14$ (be 12 ME sind variable Stückkosten 14 GE je ME)

$E(10) - K(10) = 10 \Rightarrow 440 - (1000a + 100b + 10c + d) = 10$ (bei 10 ME ist Gewinn 10 GE)

Zu lösen ist folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrr} d & = & 280 \\ 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & 358 \\ 144a & + & 12b & + & c & = & 14 \\ -1000a & - & 100b & - & 10c & - & d & = & -430 \end{array}$$

Mit dem GTR ergibt sich: $a = 0,25$; $b = -6$; $c = 50$; $d = 280$

Kostenfunktion: $K(x) = 0,25x^3 - 6x^2 + 50x + 280$

7.2.1

Gewinn bei 6 ME:

Es gilt $E(6) = 44 \cdot 6 = 264$ ME und $K(6) = 418$

Es gilt $G(6) = 264 - 418 = -154$ GE

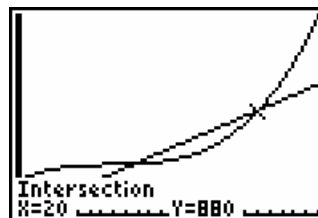
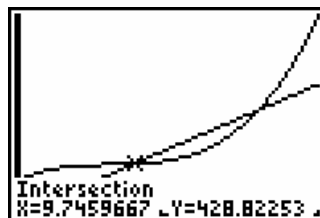
Somit macht das Unternehmen bei einer Produktion von 6 ME einen Verlust von 154 GE.

Die Kostendeckung ergibt sich bei den Schnittstellen der Kosten- und der Erlösfunktion.

Ansatz: $K(x) = E(x) \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3 - 6x^2 + 50x + 280 = 44x$

Lösung mit GTR:

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=0.25*X^3-6X^2+50X+280
Y2=44X
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```



Bei $x = 9,75$ (Nutzenschwelle) und $x = 20$ (Nutzensgrenze) besteht Kostendeckung.

Maximaler Gewinn:

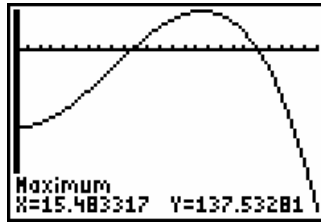
Es gilt $G(x) = E(x) - K(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 6x^2 - 6x - 280$

Hinreichende Bedingung für Maximum: $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$

Lösung mit GTR:

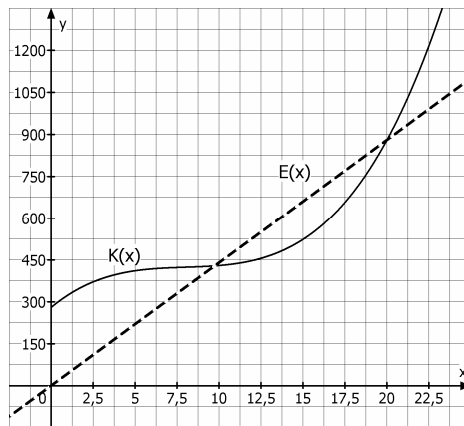
```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=-0.25X^3+6X^2-6X-280
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
    
```



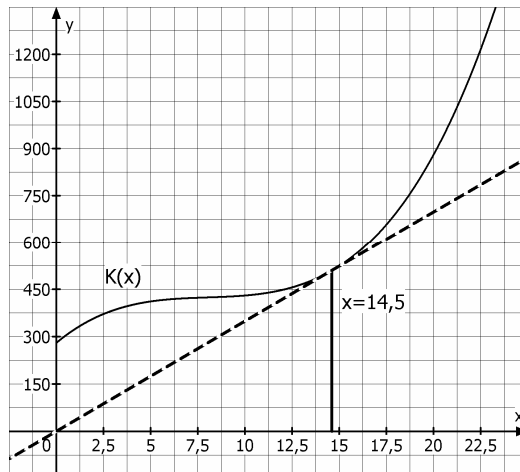
Der maximale Gewinn beträgt 137,5 GE bei einer Produktion von $x = 15,48$ ME.

7.2.2



7.2.3

Das Betriebsoptimum ergibt sich graphisch als Berührungspunkt der Tangente durch den Ursprung an das Schaubild von $K(x)$.



Die graphische Lösung lautet $x \approx 14,5$ ME.

Rechnerische Lösung:

Das Betriebsoptimum ergibt sich als Minimumstelle der Stückkostenfunktion

$$k(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + 50 + \frac{280}{x} = \frac{1}{4}x^2 - 6x + 50 + 280x^{-1}$$

$$k'(x) = \frac{1}{2}x - 6 - 280x^{-2} \text{ und } k''(x) = \frac{1}{2} + 560x^{-3}$$

Hinreichende Bedingung für Minimum der Stückkostenfunktion: $k'(x) = 0$ und $k''(x) > 0$

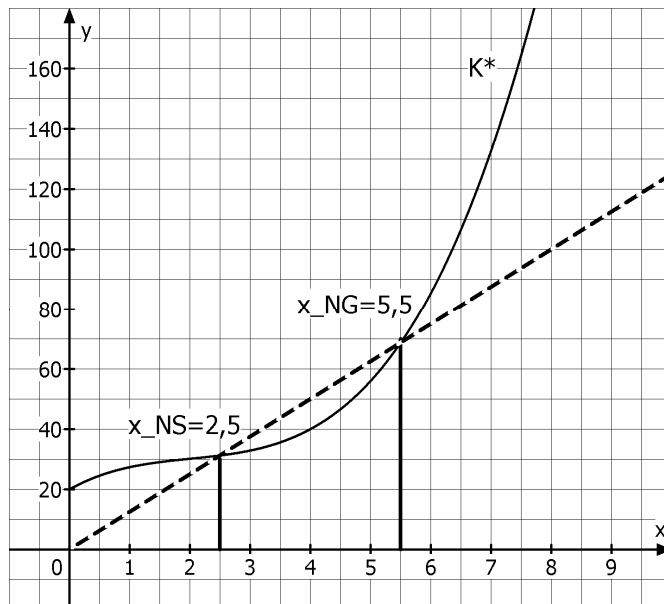
$$\begin{aligned} k'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2}x - 6 - \frac{280}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 - 280 = 0 \end{aligned}$$

Mit dem GTR ergibt sich als Lösung $x = 14,62$
 $k''(14,62) > 0$ und damit Minimum bei $x = 14,62$.

Minimaler Preis: $k(14,62) = 34,87$ GE

Der Preis muss bei mindestens 34,87 GE liegen, damit das Unternehmen verlustfrei produzieren kann.

7.3



Die Erlösfunktion muss als Ursprungsgerade so eingezeichnet werden, dass die x-Werte der Schnittpunkte mit der Kostenfunktion einen Abstand von 3 besitzen.

Aus der Zeichnung ergibt sich: Nutzenschwelle bei $x = 2,5$ und Nutzenschwelle bei $x = 5,5$.

Die gestrichelte Gerade besitzt den Punkt $(8/100)$.

Das heißt der Preis je ME (entspricht der Steigung der Geraden) beträgt $p = \frac{100}{8} = 12,5$ GE