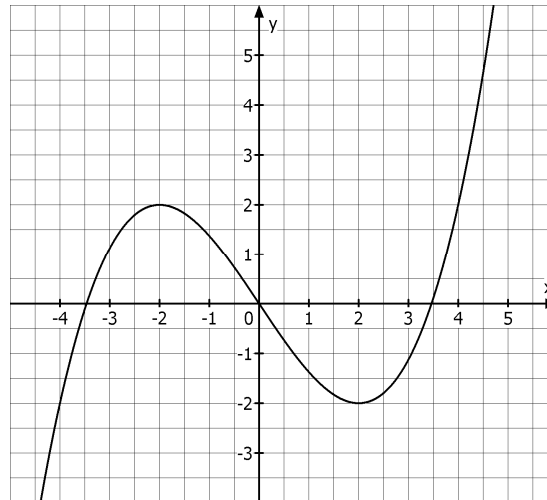


Hauptprüfung 2006 Aufgabe 1

1.1

Geben Sie eine Funktion h an, deren Schaubild mit der folgenden Kurve übereinstimmt.



(6 Punkte)

1.2

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ihr Schaubild ist K . Berechnen Sie die exakten Koordinaten der Schnittpunkte mit der x -Achse. In welchem Punkt ist die Steigung von K maximal? (5 Punkte)

1.3

Eine Gerade geht durch den Ursprung und den Punkt $(2/-2)$. K und die Gerade schließen im 1. und 4. Quadranten eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

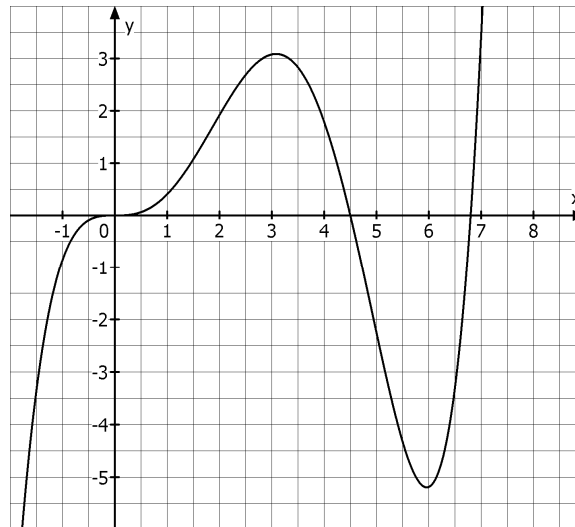
(6 Punkte)

1.4

Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $0 \leq u \leq \sqrt{12}$ schneidet K im Punkt P und die x -Achse im Punkt Q . Der Ursprung und die Punkte P und Q bilden ein Dreieck. Berechnen Sie u so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks möglichst groß wird. Geben Sie den größtmöglichen Flächeninhalt an. (5 Punkte)

1.5

Die Kurve G ist das Schaubild einer ganzrationalen Funktion g. Bezogen auf den unten gezeichneten Ausschnitt sind von den folgenden Aussagen einige falsch. Geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Antwort.



- a) $g'(0) = 0$
- b) $g'(4) > 0$
- c) $g''(0) = 0$
- d) G hat genau drei Wendepunkte
- e) $g''(6) < 0$
- f) G hat genau drei Kurvenpunkte mit waagrechter Tangente
- g) G hat genau drei Extrempunkte
- h) $\int_{-1}^3 g(x) dx < 0$

(8 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2006 Aufgabe 1

1.1

Aufgrund des Aussehens des Schaubildes (3 Nullstellen, 2 Extrempunkte) kann man eine ganzrationale Funktion 3. Grades unterstellen, also $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Da das Schaubild außerdem symmetrisch zum Ursprung ist, besitzt die Funktionsgleichung nur ungerade Hochzahlen.

Ansatz: $h(x) = ax^3 + cx$ mit $h'(x) = 3ax^2 + c$

Bedingungen:

P(2/-2) liegt auf dem Schaubild: $h(2) = -2 \Rightarrow 8a + 2c = -2$

Waagrechte Tangente bei $x = 2$: $h'(2) = 0 \Rightarrow 12a + c = 0$

Lösung des Gleichungssystems mit dem GTR:

MATRIX[A] 2 x3 $\begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 12 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$rref([A])$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & .125 \\ 0 & 1 & -1.5 \end{bmatrix}$
--	---

1, 1=8

also $a = 0,125$ und $b = -1,5$.

Es gilt $h(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x$

1.2

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$

$$-\frac{1}{4}x^3 + 3x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(-\frac{1}{4}x^2 + 3\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x^2 = 12$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x_{2,3} = \pm\sqrt{12} = \pm 2 \cdot \sqrt{3}$$

Die Nullstellen lauten $N_1(0/0)$, $N_{2,3}(\pm 2 \cdot \sqrt{3}/0)$

Eine maximale Steigung befindet sich in einem Wendepunkt von f :

Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

(damit in dem Wendepunkt eine maximale (und keine minimale !) Steigung vorliegt, muss $f'''(x) < 0$ sein)

$$\text{Es gilt } f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \text{ und } f''(x) = -\frac{3}{2}x \text{ und } f'''(x) = -\frac{3}{2}.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Da $f'''(0) < 0$ gilt, liegt bei $x = 0$ eine maximale Steigung vor.

Im Wendepunkt $W(0/f(0)) = W(0/0)$ ist die Steigung von K maximal.

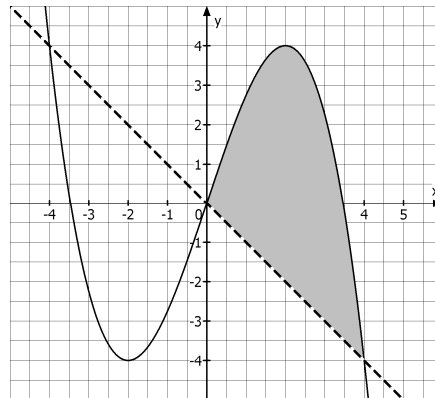
1.3

Ansatz für Geradengleichung: $y = mx + c$

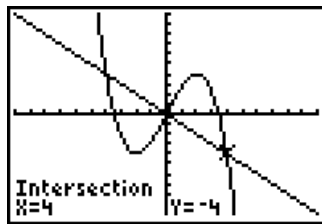
Da von der Gerade zwei Punkte bekannt sind, wird die Steigung berechnet mit der Formel

$$m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{-2 - 0}{2 - 0} = -1$$

Da die Gerade durch den Ursprung verläuft gilt $c = 0$ und es ergibt sich $y = -x$.



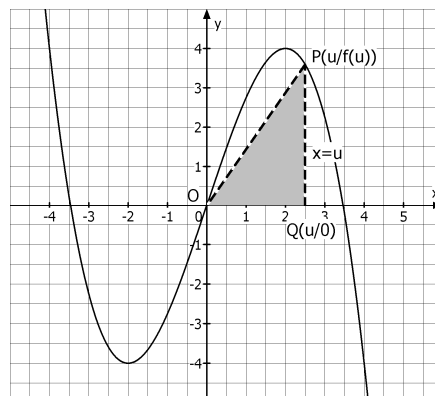
Schnittstellen der Schaubilder von $f(x)$ und $y = -x$ mit dem GTR:



also Schnittstelle bei $x = 0$ und $x = 4$.

$$\begin{aligned}
 \text{Flächenberechnung: } A &= \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^3 + 3x - (-x) \right) dx = \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^3 + 4x \right) dx = \left[-\frac{1}{16}x^4 + 2x^2 \right]_0^4 \\
 &= -\frac{1}{16} \cdot 4^4 + 32 - 0 = 16 \text{ FE}
 \end{aligned}$$

1.4



$$\text{Für die Dreiecksfläche gilt: } A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \overline{OQ} \cdot \overline{PQ}$$

Es gilt $\overline{OQ} = u - 0 = u$ und $\overline{PQ} = f(u) - 0 = f(u) = -\frac{1}{4}u^3 + 3u$

Die Zielfunktion lautet daher $A(u) = \frac{1}{2}u \cdot \left(-\frac{1}{4}u^3 + 3u\right) = -\frac{1}{8}u^4 + \frac{3}{2}u^2$ mit $0 \leq u \leq \sqrt{12}$

Hinreichende Bedingung für eine maximale Fläche: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$

Es gilt $A'(u) = -\frac{1}{2}u^3 + 3u$ und $A''(u) = -\frac{3}{2}u^2 + 3$

$A'(u) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}u^3 + 3u = 0 \Rightarrow u \cdot \left(-\frac{1}{2}u^2 + 3\right) = 0 \Rightarrow u = 0$ oder $u = \pm\sqrt{6}$

$A''(0) > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$

$A''(\sqrt{6}) = -6 < 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum mit } A(\sqrt{6}) = 4,5 \text{ FE.}$

Für die Randwerte gilt $A(0) = 0$ und $A(\sqrt{12}) = 0$.

Damit liegt bei $u = \sqrt{6}$ ein absolutes Maximum vor.

1.5

- a) ist richtig, da bei $x = 0$ ein Sattelpunkt vorliegt, der eine waagrechte Tangente besitzt.
- b) ist falsch, da die Steigung an der Stelle $x = 4$ negativ ist
- c) ist richtig, da bei $x = 0$ ein Wendepunkt (sogar ein Sattelpunkt) vorliegt
- d) ist richtig, und zwar bei $x = 0$, bei $x = 2$ und bei $x = 4,5$.
- e) ist falsch, da bei $x = 6$ keine Rechtskurve, sondern eine Linkskurve vorliegt
- f) ist richtig, und zwar bei $x = 0$, bei $x = 3$ und bei $x = 6$
- g) ist falsch, da nur bei $x = 3$ ein Hochpunkt und bei $x = 6$ ein Tiefpunkt existiert
- h) ist falsch, da der Flächenanteil unterhalb der x -Achse (zwischen $x = -1$ und $x = 0$) kleiner ist als der Flächenanteil oberhalb der x -Achse (zwischen $x = 0$ und $x = 3$)