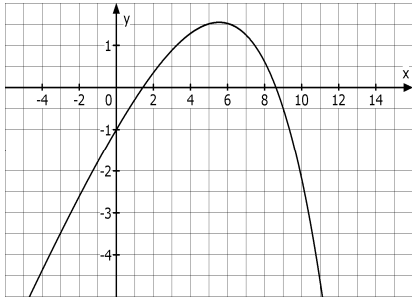


Hauptprüfung 2006 Aufgabe 2

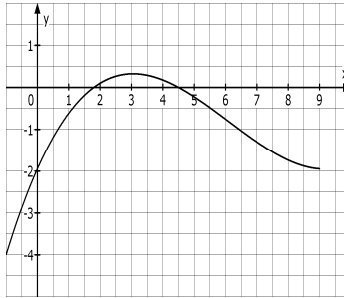
2.1

Die Funktion h mit $h(x) = x - e^{\frac{1}{4}x}$ hat das Schaubild K_h . Zwei der gezeigten Schaubilder können nicht K_h sein. Begründen Sie mit Hilfe jeweils einer Eigenschaft, welche Graphen nicht K_h sein können. (6 Punkte)

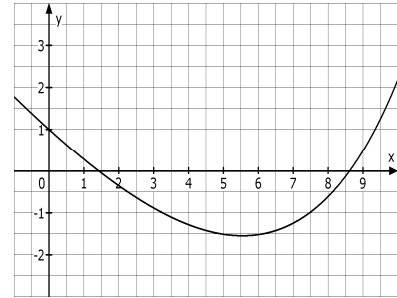
G_1



G_2



G_3



2.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x + 1 - e^{\frac{1}{3}x}$, ihr Schaubild sei K_f . Berechnen Sie die exakten Koordinaten des Hochpunktes von K_f . Bestimmen Sie die Nullstellen von f und begründen Sie, dass f nur zwei Nullstellen haben kann. Zeichnen Sie K_f in ein geeignetes Koordinatensystem. (8 Punkte)

2.3

Begründen Sie, weshalb durch den Punkt $P(0/1)$ nur eine Tangente an K_f gelegt werden kann. (5 Punkte)

2.4

Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion p zweiten Grades so, dass sich die Schaubilder von p und f in $O(0/0)$ berühren und p die Nullstelle $\frac{20}{3}$ hat. (5 Punkte)

2.5

Die Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{10}x^2 + \frac{2}{3}x$ kann als Näherung von f für $x \in [0; 4,5]$ angesehen werden. Zeichnen Sie das Schaubild K_g von g in das vorhandene Koordinatensystem.

Bestimmen Sie die Stelle $x \in [0; 4,5]$ an der die Differenz der Funktionswerte von f und g am größten ist. Wie groß ist diese Differenz? (6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2006 Aufgabe 2

2.1

Es gilt $h(0) = -1$. Damit liegt der Punkt $P(0/-1)$ auf dem Schaubild.
Dies gilt nicht für G_2 , also kann dieses Schaubild nicht K_h sein.

Berechnung der Extrempunkte von K_h :

$$\text{Es gilt } h'(x) = 1 - \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x} \text{ und } h''(x) = -\frac{1}{16}e^{\frac{1}{4}x}$$

Hinreichende Bedingung: $h'(x) = 0$ und $h''(x) \neq 0$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x} = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{4}x} = 4 \Rightarrow x = 4 \cdot \ln 4$$

$$h''(4 \ln 4) < 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum (Hochpunkt) bei } x = 4 \ln 4 \approx 5,5$$

Da G_3 keinen Hochpunkt besitzt kann dieses Schaubild nicht K_h sein.

Somit muss G_1 das gesuchte Schaubild K_h sein.

2.2

$$\text{Es gilt } f(x) = x + 1 - e^{\frac{1}{3}x} \text{ mit } f'(x) = 1 - \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x} \text{ und } f''(x) = -\frac{1}{9}e^{\frac{1}{3}x}$$

Berechnung des Hochpunktes:

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x} = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{3}x} = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot \ln 3$$

$$f''(3 \ln 3) < 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum}$$

$$\text{Aus } f(3 \ln 3) = 3 \ln 3 + 1 - e^{\frac{1}{3} \cdot 3 \ln 3} = 3 \ln 3 + 1 - 3 = 3 \ln 3 - 2 \approx 1,3 \text{ folgt } H(3 \ln 3 / 3 \ln 3 - 2)$$

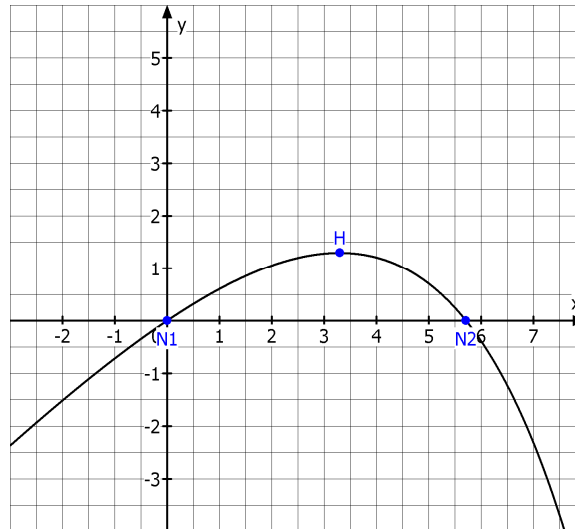
Berechnung der Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x + 1 - e^{\frac{1}{3}x} = 0$$

Mit dem GTR ergibt sich als Lösung $x = 0$ oder $x = 5,71$ und damit $N_1(0/0)$ und $N_2(5,71/0)$.

Das Schaubild von f hat keine weiteren Nullstellen.

Begründung: Für $x \rightarrow \infty$ gilt $f(x) \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow -\infty$ gilt $f(x) \rightarrow -\infty$ (aus Schaubild ablesbar). Da das Schaubild von f nur einen Hochpunkt zwischen den beiden Nullstellen besitzt und keine weiteren Extrempunkte existieren, kann das Schaubild nur zwei Nullstellen besitzen.



2.3

Vom Punkt P(0/1) aus soll eine Tangente an das Schaubild von f gelegt werden.

Der Berührungspunkt der Tangente im Schaubild sei B(u/f(u)).

Die Tangentensteigung ist $m = f'(u)$

Aufstellen der Tangentengleichung in B mit der Punkt-Steigungsform:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

$$y - f(u) = f'(u) \cdot (x - u)$$

$$y - (u + 1 - e^{\frac{1}{3}u}) = (1 - \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}u}) \cdot (x - u)$$

Einsetzen von P(0/1) in die Gleichung: (für $x = 0$ und für $y = 1$)

$$1 - (u + 1 - e^{\frac{1}{3}u}) = (1 - \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}u}) \cdot (0 - u) \Leftrightarrow -u + e^{\frac{1}{3}u} = -u + \frac{1}{3}ue^{\frac{1}{3}u} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3}u \Leftrightarrow u = 3$$

Der Berührungspunkt hat die Koordinaten B(3/f(3)) = B(3/4-e).

Da nur ein Berührungspunkt existiert, kann auch nur eine Tangente von P(0/1) aus an das Schaubild von f angelegt werden.

2.4

Ansatz für die Funktion p: $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $p'(x) = 2ax + b$

Bedingungen:

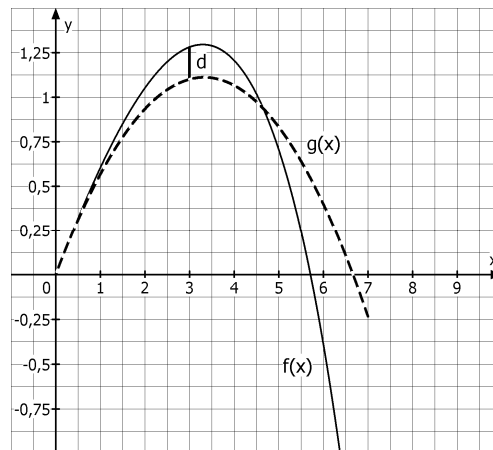
$p(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ (da O(0/0) auf dem Schaubild liegt)

$p'(0) = f'(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{2}{3}$ (da sich die Schaubilder bei $x = 0$ berühren, und das heißt gleiche Steigung)

$$p(\frac{20}{3}) = 0 \Rightarrow \frac{400}{9}a + \frac{2}{3} \cdot \frac{20}{3} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{10}$$

Die gesuchte Funktion lautet $p(x) = -\frac{1}{10}x^2 + \frac{2}{3}x$

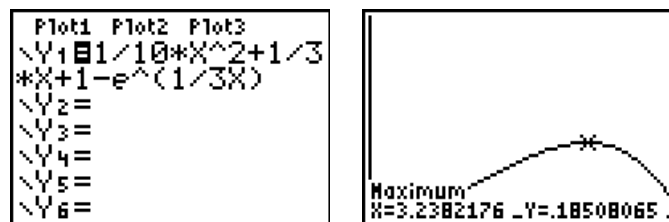
2.5



Die Differenz d der Funktionswerte wird beschrieben durch die Funktion $d(x) = f(x) - g(x)$ („oberer y-Wert minus unterer y-Wert“)

$$d(x) = x + 1 - e^{\frac{1}{3}x} - \left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{2}{3}x\right) = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{3}x + 1 - e^{\frac{1}{3}x}$$

Gesucht ist das Maximum der Funktion $d(x)$ im Intervall $[0 ; 4,5]$.
Mit dem GTR folgt:



Bei $x = 3,24$ ist die größte Differenz mit $d(3,24) = 0,185$.