

Hauptprüfung 2006 Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x + \cos(\pi \cdot x)$ mit $x \in [-2; 2]$. Ihr Schaubild ist K_f .

3.1

In welchen Quadranten liegen die Tiefpunkte von K_f ? Begründen Sie Ihre Antwort durch die Angabe der Koordinaten. Skizzieren Sie K_f in ein geeignetes Koordinatensystem.

(6 Punkte)

3.2

Wie lautet die Gleichung der Geraden, auf der alle Wendepunkte liegen?

(6 Punkte)

3.3

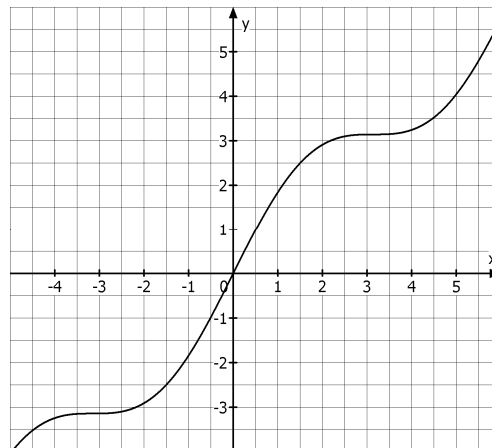
K_f schließt im ersten Quadranten mit der y -Achse und der ersten Winkelhalbierenden eine Fläche ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt mit Hilfe einer Stammfunktion. (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = ax + \sin(bx)$ mit $x \in [-2; 2]$. Ihr Schaubild ist K_g .

3.4

Weisen Sie nach, dass für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$ das Schaubild K_g an der Stelle $x = 0$ die Steigung $1 + \pi$ besitzt und an der Stelle $x = 1$ einen Wendepunkt hat. (6 Punkte)

Gegeben ist die Schaubild einer Funktion h :



3.5

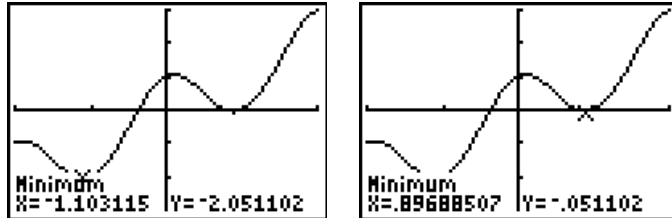
Begründen Sie, warum folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

- Das Schaubild jeder Stammfunktion von h hat an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt.
- Jede Stammfunktion von h hat im gezeichneten Bereich mindestens eine Nullstelle.
- Die Ableitungsfunktion von h hat im gezeichneten Bereich sowohl negative als auch positive Funktionswerte.

Lösung Hauptprüfung 2006 Aufgabe 3

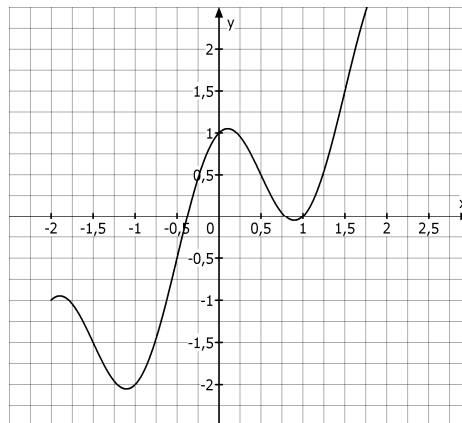
3.1

Mit dem GTR können die Tiefpunkte bestimmt werden:



Der erste Tiefpunkt lautet $T_1(-1,1/-2,05)$ und liegt im 3. Quadrant.

Der zweite Tiefpunkt lautet $T_2(0,9/-0,05)$ und liegt im 4. Quadrant.



3.2

Zur Berechnung der Wendepunkte werden die Ableitungsfunktionen benötigt:

$$f'(x) = 1 - \pi \cdot \sin(\pi \cdot x)$$

$$f''(x) = -\pi^2 \cdot \cos(\pi \cdot x)$$

$$f'''(x) = \pi^3 \cdot \sin(\pi \cdot x)$$

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -\pi^2 \cdot \cos(\pi \cdot x) = 0 \Leftrightarrow \cos(\pi \cdot x) = 0$$

$$\Rightarrow \pi \cdot x_1 = -\frac{3}{2}\pi \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \pi \cdot x_2 = -\frac{1}{2}\pi \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{und}$$

$$\Rightarrow \pi \cdot x_3 = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \pi \cdot x_4 = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow x_4 = \frac{3}{2} \quad \text{und}$$

$$\text{Es gilt } f'''(-\frac{3}{2}) \neq 0 \text{ und } f'''(-\frac{1}{2}) \neq 0 \text{ und } f'''(\frac{1}{2}) \neq 0 \text{ und } f'''(\frac{3}{2}) \neq 0$$

Deshalb existieren 4 Wendepunkte: $W_1(-\frac{3}{2}/-\frac{3}{2})$, $W_2(-\frac{1}{2}/-\frac{1}{2})$, $W_3(\frac{1}{2}/\frac{1}{2})$, $W_4(\frac{3}{2}/\frac{3}{2})$

Für das Aufstellen der Gerade g genügen zunächst 2 Wendepunkte:

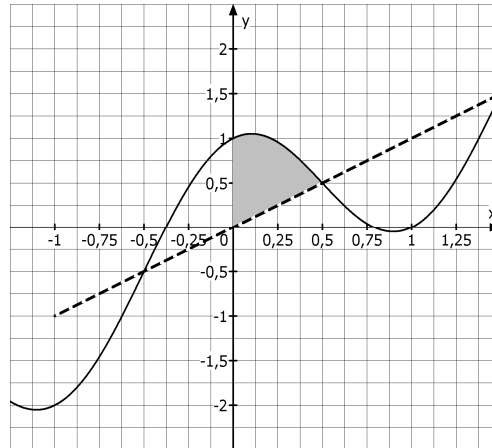
$$m = \frac{y_{W_2} - y_{W_1}}{x_{W_2} - x_{W_1}} = \frac{-\frac{1}{2} - (-\frac{3}{2})}{-\frac{1}{2} - (-\frac{3}{2})} = 1 \quad \text{also } y = 1x + c.$$

Einsetzen von W_1 ergibt: $-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} + c \Rightarrow c = 0$

Die Geradengleichung lautet $y = x$. Man kann leicht nachprüfen, dass alle 4 Wendepunkte auf dieser Geraden liegen.

3.3

Die erste Winkelhalbierende besitzt die Gleichung $g(x) = x$.



Berechnung der Integrationsgrenzen:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x + \cos(\pi \cdot x) = x \Rightarrow \cos(\pi \cdot x) = 0 \Rightarrow x = 0,5$$

Berechnung der Fläche:

$$A = \int_0^{0,5} (f(x) - g(x)) dx = \int_0^{0,5} (x + \cos(\pi \cdot x) - x) dx = \int_0^{0,5} \cos(\pi \cdot x) dx = \left[\frac{1}{\pi} \sin(\pi \cdot x) \right]_0^{0,5} = \frac{1}{\pi} \cdot 1 - 0$$

Die gesuchte Fläche beträgt $A = \frac{1}{\pi}$ FE.

3.4

Aus $g(x) = ax + \sin(bx)$ folgt $g'(x) = a + b \cdot \cos(bx)$ und $g''(x) = -b^2 \cdot \sin(bx)$

Es soll gelten: $g'(0) = 1 + \pi \Rightarrow a + b = 1 + \pi$ (1)

$$g''(1) = 0 \Rightarrow -b^2 \cdot \sin(b) = 0 \quad (2)$$

Aus (2) folgt $b = 0$ oder $\sin(b) = 0$. Da $b = 0$ keine sinnvolle Lösung ist (ansonsten würde der Sinusterm bei $g(x)$ komplett wegfallen) kommt nur $\sin(b) = 0$ und damit zum Beispiel $b = \pi$ als Lösung in Frage. Aus (1) folgt dann $a = 1$.

Die Funktion lautet $g(x) = x + \sin(\pi \cdot x)$

3.5

- a) Das Schaubild von h (als Ableitungsfunktion der Stammfunktion von h) besitzt an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ und $+$. Somit ist die Aussage wahr.

- b) Diese Aussage ist falsch. Es gibt zu einer Funktion h unendlich viele Stammfunktionen, die über eine Konstante C beliebig nach oben oder unten verschoben werden kann. Somit muss eine Stammfunktion von h im gezeichneten Bereich keine Nullstelle besitzen.
- c) Die Steigungen der Tangenten an das Schaubild von h sind entweder positiv oder an den Sattelpunkten 0. Da h' die Tangentensteigung angibt, nimmt die Ableitungsfunktion von h im gezeichneten Bereich keine negativen Funktionswerte an. Die Aussage ist falsch.