

Hauptprüfung 2006 Aufgabe 4

Gegeben sind die Punkte $A(1/6/2)$, $B(2/2/3)$ und $C(4/2/1)$.

4.1

Zeichnen Sie diese drei Punkte in ein räumliches Koordinatensystem ein.

(x_2 - und x_3 -Achse mit 1 LE = 1 cm; x_1 -Achse mit dem Schrägwinkel 45° und

$$1 \text{ LE} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ cm})$$

(3 Punkte)

4.2

Beweisen Sie, dass das Dreieck ABC ein rechtwinkliges Dreieck ist. Durch den Punkt D lässt sich das Dreieck ABC zu einem Rechteck ergänzen. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D.

(4 Punkte)

4.3

Für welches $q \in \mathbb{R}$ ist die Gerade g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} q \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ parallel zur Geraden

durch die Punkte A und B ?

(5 Punkte)

4.4

Eine Pyramide hat als Grundfläche das Rechteck ABCD und die Spitze $S(10/7,75/9)$.

S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt M der Grundfläche ABCD. Zeichnen Sie die Pyramide und den Punkt M in ihr Koordinatensystem ein. Berechnen Sie das Volumen dieser

Pyramide. Zeichnen Sie den Winkel α , den der Grat $\overline{AS}$ mit der Diagonalen der Grundfläche bildet, ein und berechnen Sie seine Größe.

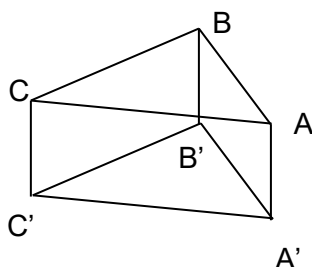
(11 Punkte)

4.5

Mit dem Dreieck ABC als Deckfläche soll ein Prisma erzeugt werden, bei welchem die Kanten $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ senkrecht zur Deckfläche stehen (siehe Skizze).

Beweisen Sie, dass der Vektor $\overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dafür geeignet ist. Mit welchem Faktor

$a \in \mathbb{R}$ müsste man $\overline{CC'}$ multiplizieren, damit das Prisma das Volumen 45 hat ?

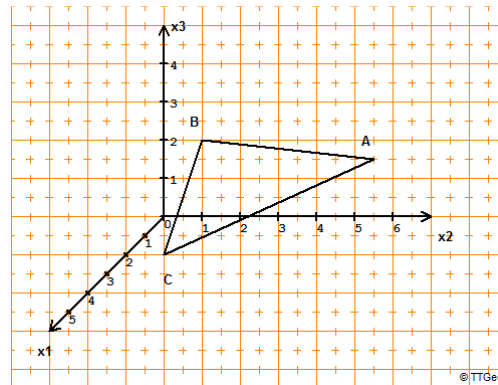


(7 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2006 Aufgabe 4

4.1



4.2

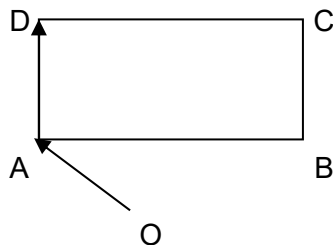
Zunächst werden die Dreiecksseiten als Vektoren dargestellt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 2 + (-4) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 0$.

Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren Null ergibt, stehen die Vektoren senkrecht aufeinander. Somit befindet sich im Punkt B des Dreiecks ein rechter Winkel.

Berechnung des Punktes D:



Es gilt $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Es gilt: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit gilt D(3/6/0).

4.3

Die Gerade durch A und B besitzt den Richtungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit die Geraden parallel sind, müssen ihre Richtungsvektoren Vielfache zueinander sein.

Es muss gelten: $k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$. Aus der 2. und 3. Zeile: $k = -3$. Aus der 1. Zeile: $q = -3$.

4.4

Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$.

Die Koordinaten von M ergeben sich aus der Formel $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4 \\ 1,5 \end{pmatrix} \text{ und damit } M(2,5/4/1,5).$$

Die Höhe der Pyramide entspricht der Strecke $\overline{MS}$:

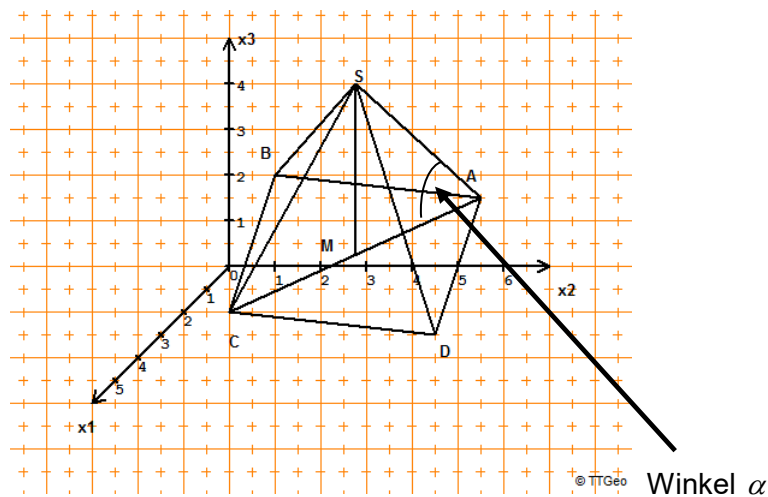
$$|\overline{MS}| = \left| \begin{pmatrix} 7,5 \\ 3,75 \\ 7,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{7,5^2 + 3,75^2 + 7,5^2} = 11,25$$

$$\text{Nun gilt: } V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}| \cdot 11,25 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1+16+1} \cdot \sqrt{4+0+4} \cdot 11,25 = 45 \text{ VE.}$$

Berechnung des Winkels:

Der Winkel α wird gebildet von den Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AS}$.

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AS}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1,75 \\ 7 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+16+1} \cdot \sqrt{81+3,0625+49}} = \frac{13}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{133,0625}} \Rightarrow \alpha = 77,23^\circ$$



4.5

Der Vektor $\overrightarrow{CC'}$ ist geeignet, wenn der Vektor senkrecht auf den Vektoren $\overrightarrow{CB}$ und $\overrightarrow{CA}$ steht.

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + 0 + 4 = 0.$$

Somit stehen die Vektoren $\overrightarrow{CC'}$ und $\overrightarrow{CB}$ senkrecht aufeinander.

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -6 + 4 + 2 = 0.$$

Somit stehen die Vektoren $\overrightarrow{CC'}$ und $\overrightarrow{CA}$ senkrecht aufeinander.

$$\text{Volumen des Prismas} = A_{\text{Dreieck}} \cdot h_{\text{Prisma}}$$

$$\text{Es gilt } A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+16+1} \cdot \sqrt{4+0+4} = 6$$

$$\Rightarrow 45 = 6 \cdot h_{\text{Prisma}} \Rightarrow h_{\text{Prisma}} = 7,5$$

$$\text{Es gilt } h_{\text{Prisma}} = a \cdot |\overrightarrow{CC'}|. \text{ Mit } |\overrightarrow{CC'}| = \sqrt{4+1+4} = 3 \text{ folgt } a = 2,5.$$