

Hauptprüfung 2006 Aufgabe 5

5.1

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = -7 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 7 \\ -4x_1 & +6x_2 & -8x_3 & = 10 \end{array}$$

5.1.1

Prüfen Sie, ob der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Lösungsvektor dieses Gleichungssystem ist.

(2 Punkte)

5.1.2

Berechnen Sie alle Lösungsvektoren des Gleichungssystems. Untersuchen Sie, ob es einen Lösungsvektor gibt, bei dem alle drei Komponenten gleich sind.

(8 Punkte)

5.2

Gegeben sind die Matrizen $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ und $N = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösen Sie die Matrixgleichung $M \cdot X = N + X$ nach X auf und berechnen Sie die Matrix X .

(5 Punkte)

5.3

Die beiden Zweigwerke Z_1 und Z_2 eines Betriebs sind nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten. Im derzeitigen Produktionszeitraum gilt folgende Input-Output-Tabelle:

	Z_1	Z_2	Markt	Gesamtproduktion
Z_1	x_{11}	18	54	120
Z_2	36	x_{22}	45	90

5.3.1

Berechnen Sie den Eigenverbrauch der beiden Zweigwerke und die Technologie-Matrix.

(3 Punkte)

5.3.2

Im vergangenen Produktionszeitraum produzierte das Zweigwerk Z_1 150 ME und das Werk Z_2 100 ME. Erstellen Sie für diesen Zeitraum eine Input-Output-Tabelle.

(6 Punkte)

5.3.3

In der kommenden Produktionsphase rechnet Z_1 mit einer Marktabgabe von 100 ME und plant eine Produktion von 200 ME. Wie viele Mengeneinheiten muss dazu das Zweigwerk Z_2 herstellen ? Wie viele Mengeneinheiten kann Z_2 an den Markt abgeben ?

(6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2006 Aufgabe 5

5.1.1

Einsetzen des Lösungsvektors in das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rclcl} 4 & -9 & -2 & = & -7 \\ 8 & +3 & -4 & = & 7 \\ -16 & +18 & +8 & = & 10 \end{array} \quad \text{ergibt drei wahre Aussagen.}$$

Der dargestellte Vektor ist ein Lösungsvektor des Gleichungssystems.

5.1.2

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & -7 & | \cdot (-2) & \leftarrow & | \cdot 4 & \leftarrow \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & = & 7 & & & & \\ -4x_1 & +6x_2 & -8x_3 & = & 10 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & -7 \\ & +7x_2 & & = & 21 \\ & -6x_2 & & = & -18 \end{array}$$

Aus der 2. bzw. 3. Zeile ergibt sich $x_2 = 3$.

Da in der 1. Zeile 2 Variablen übrig bleiben, ergeben sich unendlich viele Lösungen.

Setze $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$

Daraus folgt $x_1 - 9 + 2t = -7 \Rightarrow x_1 = 2 - 2t$

Der allgemeine Lösungsvektor lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 - 2t \\ 3 \\ t \end{pmatrix}$

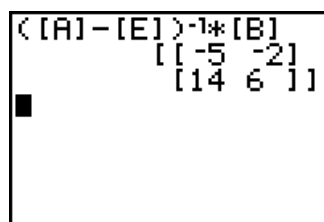
Damit alle 3 Komponenten gleich sind, müsste gelten: $2 - 2t = 3 = t$

Es gibt keine Zahl t , für die diese Gleichung erfüllt ist.

5.2

$$\begin{aligned} M \cdot X &= N + X \Leftrightarrow M \cdot X - X = N \Leftrightarrow (M - E) \cdot X = N \quad | \cdot (M - E)^{-1} \text{ von links} \\ \Rightarrow X &= (M - E)^{-1} \cdot N \end{aligned}$$

Mit dem GTR kann die Matrix nun berechnet werden:



also folgt $X = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$

5.3.1

Für den Eigenverbrauch gilt: $x_{11} + 18 + 54 = 120 \Rightarrow x_{11} = 48$

$$x_{22} + 36 + 45 = 90 \Rightarrow x_{22} = 9$$

Das Zweigwerk Z_1 hat einen Eigenverbrauch von 48 ME und Z_2 von 9 ME.

$$\text{Technologiematrix } A = \begin{pmatrix} \frac{48}{120} & \frac{18}{90} \\ \frac{36}{120} & \frac{9}{90} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

5.3.2

Gegeben ist der Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Mit Hilfe der Technologiematrix A aus 5.3.1 können die Werte der Input-Output-Tabelle bestimmt werden: $x_{11} = 150 \cdot 0,4 = 60$ $x_{12} = 100 \cdot 0,2 = 20$

$$x_{21} = 150 \cdot 0,3 = 45 \quad x_{22} = 100 \cdot 0,1 = 10$$

Für die Marktabgabe gilt: $y_1 = 150 - 60 - 20 = 70$ und $y_2 = 100 - 45 - 10 = 45$

Input-Output-Tabelle:

	Z_1	Z_2	Markt	Produktion
Z_1	60	20	70	150
Z_2	45	10	45	100

5.3.3

Es gilt die Leontief-Gleichung $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y}$

$$\begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 \\ -0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gleichung 1: } 0,6 \cdot 200 - 0,2x_2 = 100 \Rightarrow x_2 = 100$$

$$\text{Gleichung 2: } -0,3 \cdot 200 + 0,9 \cdot 100 = y_2 \Rightarrow y_2 = 30$$

Das Zweigwerk Z_2 muss 100 ME herstellen und kann 30 ME an den Markt abgeben.