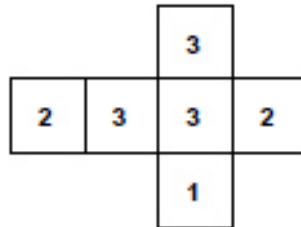


Hauptprüfung 2006 Aufgabe 6

Eine Schulklasse hat für ein Gewinnspiel zwei Würfel gebastelt, einen roten und einen blauen, die sich nur in den Farben unterscheiden. Die beiden Würfel sind gemäß der Abbildung mit den Ziffern 1, 2 und 3 beschriftet.



Für ein Spiel werden beide Würfel gleichzeitig geworfen. Aus den beiden Augenzahlen wird eine zweistellige Zahl gebildet. Die Augenzahl des roten Würfels ergibt die Zehnerziffer. Die Augenzahl des blauen Würfels ergibt die Einerziffer.

6.1

Erstellen Sie für ein Spiel ein geeignetes Baumdiagramm und geben Sie für jedes mögliche Ergebnis die zugehörige Wahrscheinlichkeit an. (6 Punkte)

6.2

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Die Zahl ist kleiner als Zwanzig.

B: Die Zahl ist gerade.

C: Die Zahl ist ungerade.

D: Die Quersumme der Zahl ist mindestens 4. (4 Punkte)

Am Schulfest möchte die Klasse ihr Gewinnspiel „Elf gewinnt“ zu den folgenden Bedingungen anbieten:

Der Einsatz je Spiel beträgt 1€.

Hauptpreis: 5 € für das Ergebnis „Elf“

Trostpreis: 1€ für das Ergebnis „Dreiunddreißig“ oder „Zweiundzwanzig“

Verloren: 0 € für alle andere Ergebnisse.

6.3

Geben Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit an, mit der einem Spieler 5 €, 1€ bzw. 0€ ausbezahlt werden. (4 Punkte)

6.4

Mit welchem Gewinn kann die Klasse bei 500 Spielen rechnen ? Wie müsste der Auszahlungsbetrag für das Ergebnis „Elf“ abgeändert werden, damit das Spiel fair wird ? (7 Punkte)

6.5

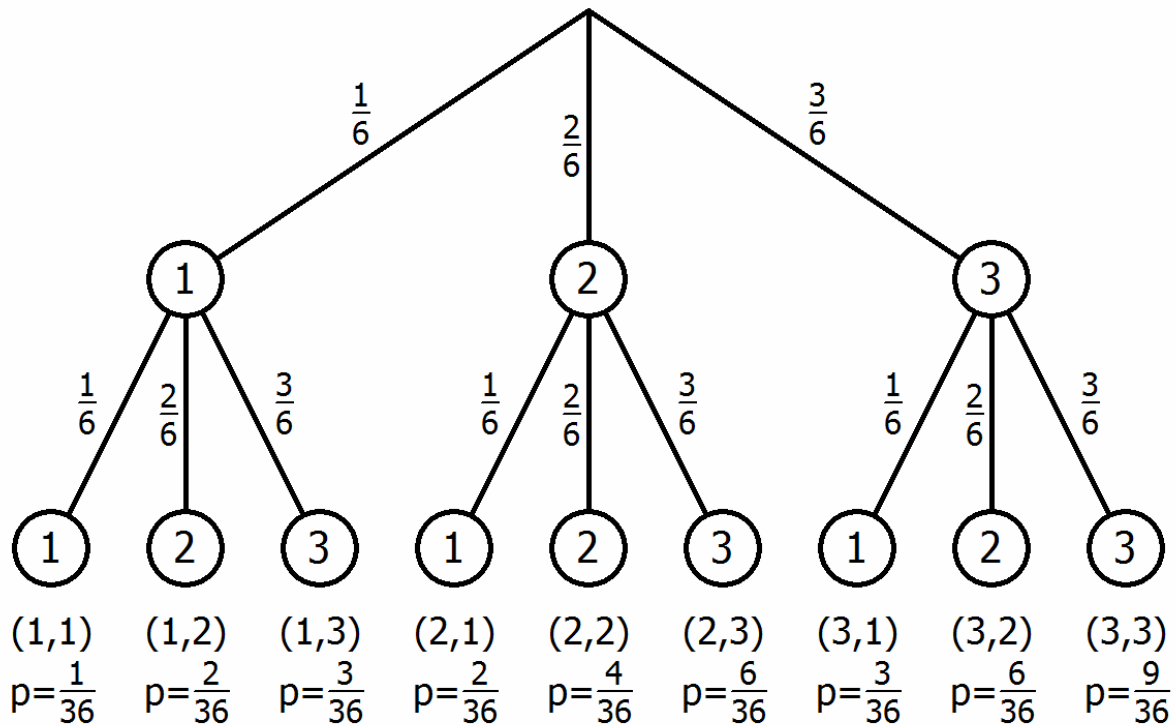
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei fünf Spielen in Serie genau zweimal das Ergebnis „Elf“ zu erreichen ? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei fünf Spielen in Serie mehr als einmal das Ergebnis „Elf“ zu erreichen ? (8 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2006 Aufgabe 6

6.1

Baumdiagramm



Die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ergebnisse ergeben sich durch Multiplikation der Pfadwahrscheinlichkeiten, z.B. $P(11) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

6.2

$$P(A) = P(11) + P(12) + P(13) = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = P(12) + P(22) + P(32) = \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(C) = 1 - P(B) = \frac{2}{3}$$

$$P(D) = P(22) + P(23) + P(31) + P(13) + P(32) + P(33) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{31}{36}$$

6.3

$$P(\text{Auszahlung } 5\text{€}) = P(11) = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{Auszahlung } 1\text{€}) = P(22) + P(33) = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36}$$

$$P(\text{Auszahlung } 0\text{€}) = 1 - \frac{1}{36} - \frac{13}{36} = \frac{11}{18}$$

6.4

Durchschnittliche (erwartete) Auszahlung pro Spiel: $5 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{13}{36} = 0,50$ Euro

Durchschnittlicher Gewinn pro Spiel = 1 Euro – 0,50 Euro = 0,50 Euro

Erwarteter Gewinn bei 500 Spielen = $500 \cdot 0,5 = 250$ Euro

Der Auszahlungsbetrag für „Elf“ sei nun x.

Damit das Spiel fair ist, muss der erwartete Gewinn pro Spiel dem Einsatz entsprechen, also Erwarteter Gewinn = 1 Euro

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{13}{36} = 1 \Rightarrow x = 23 \text{ Euro}$$

Wenn das Spiel fair sein soll, muss die Auszahlung für „Elf“ 23 Euro betragen.

6.5

$$P(\text{genau zweimal „Elf“ in 5 Spielen}) = \left(\frac{1}{36}\right)^2 \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^3 \cdot 10 = 0,007 = 0,7\%$$

$$\text{Erklärung: } P(11) = \frac{1}{36} \quad \text{und} \quad P(\text{keine 11}) = \frac{35}{36}$$

Wenn genau zweimal „Elf“ in 5 Spielen geworfen werden soll, wird dreimal „keine Elf“ geworfen. Der Multiplikator 10 entsteht deshalb, weil die Reihenfolge, wann die „Elf“ in den 5 Spielen auftreten soll, keine Rolle spielt und man auf 10 verschiedene Art und Weisen zweimal die „Elf“ in 5 Spielen unterbringen kann.

$$P(\text{„mehr als einmal Elf“}) = 1 - P(\text{„keine Elf“}) - P(\text{„genau eine Elf“})$$

$$P(\text{„keine Elf“}) = \left(\frac{35}{36}\right)^5 = 0,86862 \quad P(\text{„genau eine Elf“}) = \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^4 \cdot 5 = 0,1241$$

$$P(\text{„mehr als einmal Elf“}) = 1 - 0,86862 - 0,1241 = 0,00728 = 0,728 \%$$