

Hauptprüfung 2006 Aufgabe 7

7.1

Die Gesamtkosten eines Unternehmens können durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades beschrieben werden. Die Erlösfunktion ist linear. Der Marktpreis für 1 ME (Mengeinheit) beträgt zur Zeit 30 GE (Geldeinheiten). Das Unternehmen kennt seine fixen Kosten in Höhe von 40 GE. Die bei einer Produktion von 3,5 ME entstehenden minimalen variablen Stückkosten betragen 7,75 GE. Bei einer Ausbringungsmenge von 2 ME besteht Kostendeckung. Bestimmen Sie die Funktionsterme der Gesamtkosten- und der Erlösfunktion. (7 Punkte)

Die Gesamtkostenfunktion K und die Erlösfunktion E sind nun gegeben durch

$$K(x) = x^3 - 7x^2 + 20x + 40$$

$$E(x) = 30x$$

7.2.1

Zeichnen Sie die Schaubilder von K und E in ein geeignetes Koordinatensystem. (4 Punkte)

7.2.2

Begründen Sie, warum bei einer Produktion von 1 ME das Unternehmen keinen Gewinn macht. Geben Sie die Gewinnzone an. (4 Punkte)

7.3.1

Bestimmen Sie zeichnerisch das Betriebsoptimum. (2 Punkte)

7.3.2

Berechnen Sie die Stückkosten im Betriebsoptimum. Welche Bedeutung hat diese Größe hinsichtlich der Festlegung des Marktpreises. (5 Punkte)

Durch eine Veränderung am Markt muss das Unternehmen den Marktpreis auf 25 GE senken. Gleichzeitig steigen die Fixkosten um 5 GE.

7.4.1

Bestimmen Sie den maximalen Gewinn, der jetzt erzielt werden kann, mit Hilfe der Ableitung der Gewinnfunktion. (5 Punkte)

7.4.2

Wie groß ist dann die Gewinnzone. (3 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2006 Aufgabe 7

7.1

Erlösfunktion: $E(x) = 30x$ (Erlösfunktion ist linear und 1ME kostet 30 GE)

Kostenfunktion: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $k_v(x) = ax^2 + bx + c$ und $k'_v(x) = 2ax + b$

Bedingungen:

$K(0) = 40 \Rightarrow d = 40$ (Fixkosten 40 GE)

$k'_v(3,5) = 0 \Rightarrow 7a + b = 0$ (variable Stückkosten sind bei $x = 3,5$ minimal)

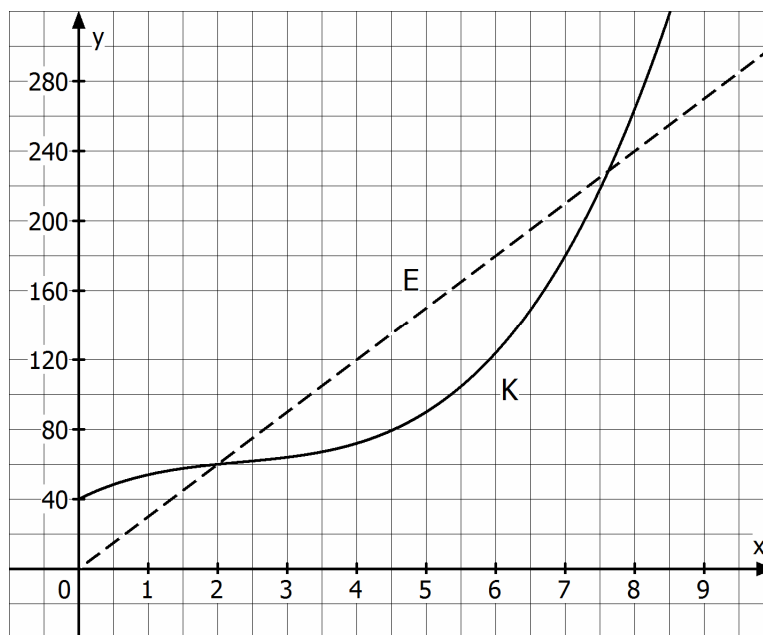
$k_v(3,5) = 7,75 \Rightarrow 12,25a + 3,5b + c = 7,75$ (für $x = 3,5$ sind variable Stückkosten 7,75 GE)

$K(2) = E(2) \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 60$ (Kostendeckung bei $x = 2$ ME)

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt sich mit dem GTR: $a = 1$, $b = -7$, $c = 20$, $d = 40$

Die Kostenfunktion lautet $K(x) = x^3 - 7x^2 + 20x + 40$

7.2.1

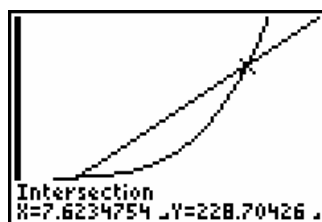
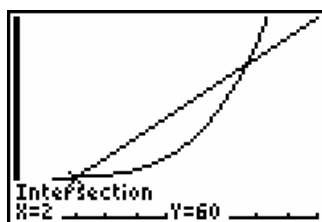


7.2.2

Für $x = 1$ ME gilt $K(1) = 54$ und $E(1) = 30$.

Da für $x = 1$ die Kosten über dem Erlös liegen, macht das Unternehmen keinen Gewinn.

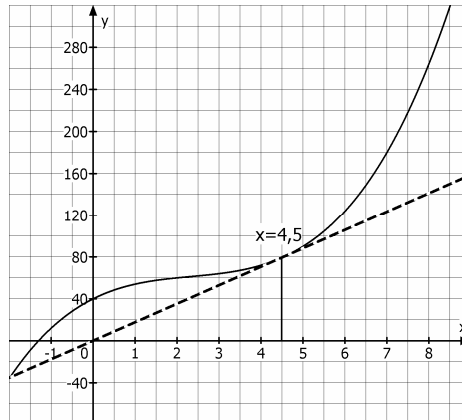
Die Gewinnzone ergibt sich aus den Schnittpunkten von K und E mit dem GTR:



Gewinnzone ist $2 \leq x \leq 7,62$ ME

7.3.1

Das Betriebsoptimum ist anschaulich der x-Wert des Berührungspunktes der Ursprungstangente an das Schaubild von $K(x)$.



Das Betriebsoptimum liegt bei $x = 4,5$.

7.3.2

Das Betriebsoptimum ergibt sich rechnerisch als Schnittpunkt der Schaubilder der Stückkostenfunktion $k(x)$ und der Grenzkosten $K'(x)$.

$$k(x) = K'(x) \Leftrightarrow x^2 - 7x + 20 + \frac{40}{x} = 3x^2 - 14x + 20$$

Als Schnittpunkt ergibt sich mit dem GTR die Lösung $x = 4,49$.

Die Stückkosten im Betriebsoptimum betragen $k(4,49) = 17,64$ GE.

Bedeutung: Die Stückkosten von 17,64 GE im Betriebsoptimum sind die langfristige Preisuntergrenze.

7.4.1

Die neue Erlösfunktion lautet $E(x) = 25x$.

Die neue Kostenfunktion lautet $K(x) = x^3 - 7x^2 + 20x + 45$

Die Gewinnfunktion lautet $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 7x^2 + 5x - 45$

Hinreichende Bedingung für maximalen Gewinn: $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$

Es gilt $G'(x) = -3x^2 + 14x + 5$ und $G''(x) = -6x + 14$

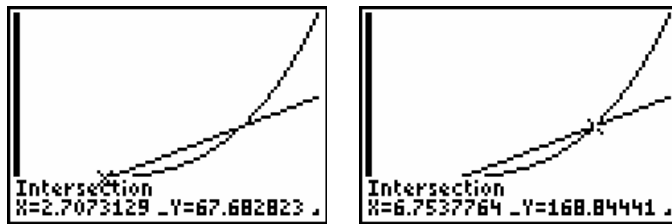
$$G'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 14x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 60}}{-6} = \frac{-14 \pm 16}{-6} \Rightarrow x = 5 \text{ oder } x = -\frac{1}{3}$$

Negative x-Werte kommen nicht in Frage.

$G''(5) < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$

Da $G(5) = 30$ GE ist, beträgt der maximale Gewinn 30 GE.

Die Gewinnzone ergibt sich durch die Schnittpunkte der Schaubilder von K und E:



Die neue Gewinnzone ist $2,7 \leq x \leq 6,75$.