

Hauptprüfung 2005 Aufgabe 1

1.1

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat in $W(0/1,25)$ einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente (Sattelpunkt). An der Stelle $x = 3$ hat die Funktion den größten Funktionswert; dieser Funktionswert ist 8. Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.
(6 Punkte)

1.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{5}{4}$; $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K .

Zeigen Sie, dass K genau zwei Punkte mit waagrechter Tangente besitzt und geben Sie deren Koordinaten an.

Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

Ermitteln Sie (z.B. mit dem Taschenrechner) die beiden Schnittpunkte von K mit der x -Achse und begründen Sie, dass es keine weiteren Schnittpunkte von K mit der x -Achse geben kann.

Zeichnen Sie K .

(12 Punkte)

1.3

Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $y = 4x - \frac{11}{4}$, $x \in \mathbb{R}$

Zeichnen Sie die Gerade g in das bestehende Koordinatensystem ein.

Die Gerade g und die Kurve K begrenzen eine Fläche. Ermitteln Sie (z.B. mit dem Taschenrechner) die Schnittpunkte von g mit K .

Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

(6 Punkte)

1.4

Für welche Werte von u mit $-1 \leq u \leq 3$, $u \in \mathbb{R}$ ist die Steigung der Tangente an K am größten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2005 Aufgabe 1

1.1

Ansatz für die Funktion: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$$\Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \text{ und } f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

W(0/1,25) liegt auf dem Schaubild: $f(0) = 1,25 \Rightarrow e = 1,25$ (1)

H(3/8) liegt auf dem Schaubild: $f(3) = 8 \Rightarrow 81a + 27b + 9c + 3d + e = 8$ (2)

Waagrechte Tangente bei $x = 0$: $f'(0) = 0 \Rightarrow d = 0$ (3)

Waagrechte Tangente bei $x = 3$: $f'(3) = 0 \Rightarrow 108a + 27b + 6c + d = 0$ (4)

Wendestelle bei $x = 0$: $f''(0) = 0 \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$ (5)

Einsetzen der Ergebnisse von (1), (3) und (5) in (2) und (4) ergibt:

$$81a + 27b = 6,75$$

$$108a + 27b = 0$$

Mit dem GTR ergibt sich $a = -0,25$ und $b = 1$.

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $f(x) = -0,25x^4 + x^3 + 1,25$

1.2

Ableitungen:

$$f'(x) = -x^3 + 3x^2 \text{ und } f''(x) = -3x^2 + 6x \text{ und } f'''(x) = -6x + 6$$

Punkte mit waagrechter Tangente:

Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (-x + 3) = 0$$

Daraus folgt $x = 0$ oder $x = 3$.

Mit $f(0) = \frac{5}{4}$ lautet ein Punkt $P_1(0/\frac{5}{4})$ und mit $f(3) = 8$ lautet der andere Punkt $P_2(3/8)$.

Wendepunkte

Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x \cdot (-x + 2) = 0$$

Daraus folgt $x = 0$ oder $x = 2$.

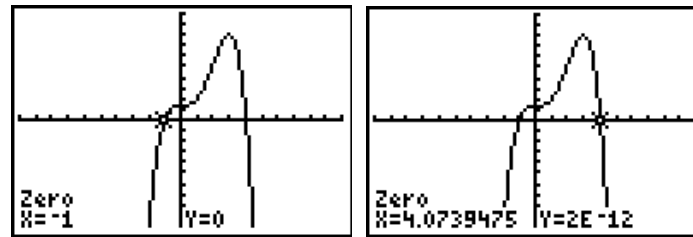
$$f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow W_1(0/f(0)) = W_1(0/\frac{5}{4})$$

$$f'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow W_2(2/f(2)) = W_2(2/5,25)$$

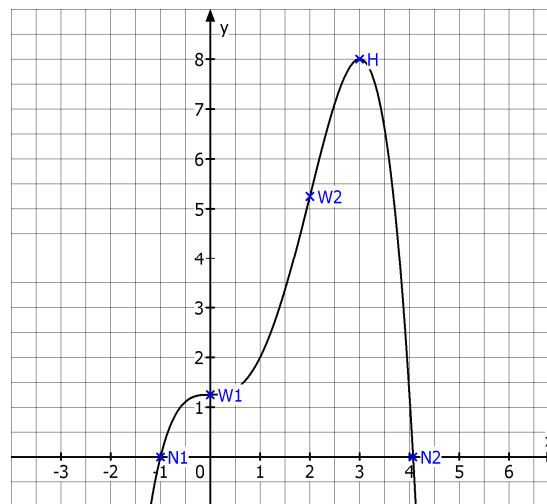
Schnittpunkte mit der x-Achse:

Mit dem GTR ergibt sich, dass das Schaubild K die x-Achse an den Stellen $x = -1$ und $x = 4,07$ schneidet.

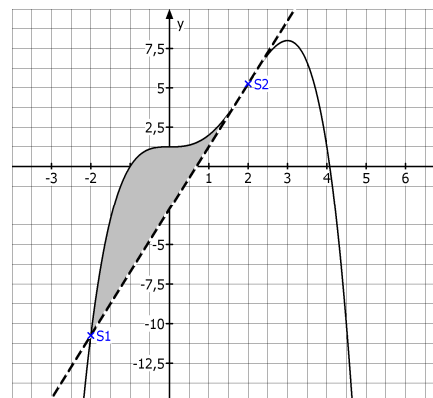
Die beiden Nullstellen lauten $N_1(-1/0)$ und $N_2(4,07/0)$.



Weitere Schnittstellen mit der x-Achse kann es weder für $x > 4,07$ noch für $x < -1$ geben. Für beide Bereiche gibt es keine Punkte mit waagrechter Tangente (die einzigen Stellen mit waagrechter Tangente sind bei $x = 0$ und $x = 3$) und somit existieren in diesen Bereichen keine Extrempunkte, bei denen das Schaubild von K wieder zur x-Achse „umkehren“ könnte.



1.3



Die Gerade $y = 4x - \frac{11}{4}$ schneidet das Schaubild von f an den Stellen $x = -2$ und $x = 2$ (Berechnung mit GTR).

Für die Fläche zwischen dem Schaubild von f und der Geraden g ergibt sich

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^2 (-0,25x^4 + x^3 + 12,5 - (4x - \frac{11}{4})) dx = \int_{-2}^2 (-0,25x^4 + x^3 - 4x + 4) dx = \left[-\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4x \right]_{-2}^2 \\
 &= -\frac{32}{20} + 4 - 8 + 8 - \left(-\frac{32}{20} + 4 - 8 - 8 \right) = 12,8
 \end{aligned}$$

1.4

Die Tangentensteigungen sind an den Wendepunkten des Schaubildes von f minimal bzw. maximal.

Die Wendepunkte befinden sich gemäß 1.2 bei $x = 0$ und $x = 2$.

Die Tangentensteigungen in den Wendepunkten sind $f'(0) = 0$ und $f'(2) = 4$.

Eine mögliche Lösung für die maximale Tangentensteigung wäre somit $u = 2$.

Nun ist es aber möglich, dass an den Randwerten des angegebenen Intervalles $-1 \leq u \leq 3$ noch größere Tangentensteigungen existieren.

Da $f'(-1) = 4$ und $f'(3) = 0$ gilt, gibt es im Intervall $-1 \leq u \leq 3$ zwei Stellen, an denen das Schaubild von f eine maximale Tangentensteigung von $m = 4$ besitzt: Für $u = 2$ und $u = -1$.