

Hauptprüfung 2005 Aufgabe 2

Das Schaubild mit der Gleichung $y = -e^{2a \cdot x} + \frac{e}{2} \cdot x + 1$ geht durch den Punkt $P(2/1)$.

2.1

Bestimmen Sie a .

(4 Punkte)

2.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}e \cdot x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f .

Untersuchen Sie K_f auf Hoch- und Tiefpunkte.

Zeichnen Sie K_f im Bereich $-2 \leq x \leq 4,5$.

Begründen Sie, dass K_f keinen Wendepunkt hat.

(7 Punkte)

2.3

Die Funktion h mit $h(x) = e^{\frac{1}{2}x} - e + 1$; $x \in \mathbb{R}$ hat das Schaubild K_h .

Zeichnen Sie K_h in das vorhandene Koordinatensystem ein und untersuchen Sie K_h auf gemeinsame Punkte mit K_f im Bereich $-2 \leq x \leq 4,5$.

Können K_h und K_f außerhalb dieses Bereiches gemeinsame Punkte haben?

Begründen Sie Ihre Antwort.

(6 Punkte)

2.4

Bestimmen Sie die Zahl $u > 0$ so, dass $\int_0^u (f(x) - h(x))dx = 0$ wird.

Erklären Sie das Ergebnis durch Vergleich zweier geeigneter Flächenstücke und machen Sie diese in der Zeichnung kenntlich.

(8 Punkte)

2.5

Geben Sie die Gleichung der Tangente an K_h im Punkt $P(2/1)$ an.

Wie weit ist der Schnittpunkt dieser Tangente mit der x -Achse vom Schnittpunkt K_h mit der x -Achse entfernt?

(5 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2005 Aufgabe 2

2.1

Um den Parameter a zu berechnen, wird der Punkt $P(2/1)$ in die Funktion

$$y = -e^{2a \cdot x} + \frac{e}{2} \cdot x + 1 \text{ eingesetzt: } 1 = -e^{4a} + e + 1 \Rightarrow e^{4a} = e \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow a = 0,25$$

2.2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}e \cdot x + 1$

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}e \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}$$

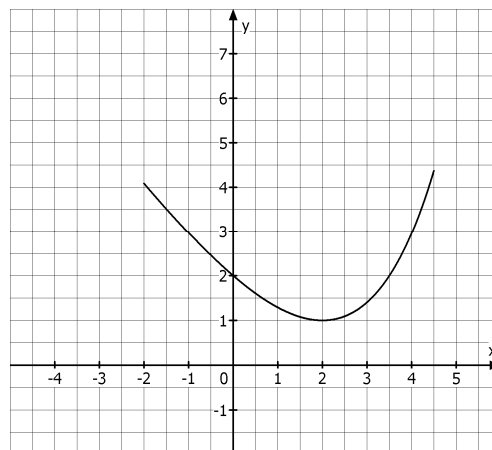
Extrempunkte:

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}e = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}x} = e \Rightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$f''(2) = \frac{1}{4}e > 0 \Rightarrow \text{TP}(2/f(2)) \Rightarrow \text{TP}(2/1)$$

Schaubild von f :



Wendepunkte:

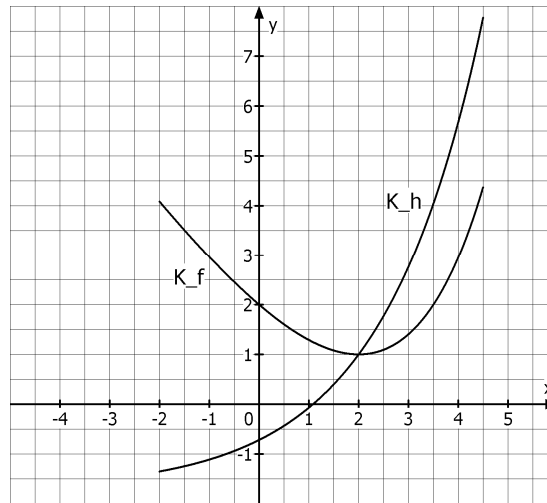
Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} = 0 \quad \text{und diese Gleichung ist nicht lösbar.}$$

Daraus folgt, dass das Schaubild von f keine Wendepunkte besitzt.

2.3

Schaubild von f und h:



Gemeinsame Punkte:

$$\text{Ansatz: } f(x) = h(x) \Rightarrow e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}ex + 1 = e^{\frac{1}{2}x} - e + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}ex = e \Rightarrow x = 2$$

Aus $f(2) = 1$ folgt, dass die Schaubilder einen gemeinsamen Punkt $P(2/1)$ besitzen.

Da rechnerisch nur eine Schnittstelle entsteht, gibt es außerhalb des Bereiches $-2 \leq x \leq 4,5$ keine weiteren gemeinsamen Punkte der Schaubilder.

Für $x < 2$ gilt $f(x) > h(x)$ und für $x > 2$ gilt $h(x) > f(x)$.

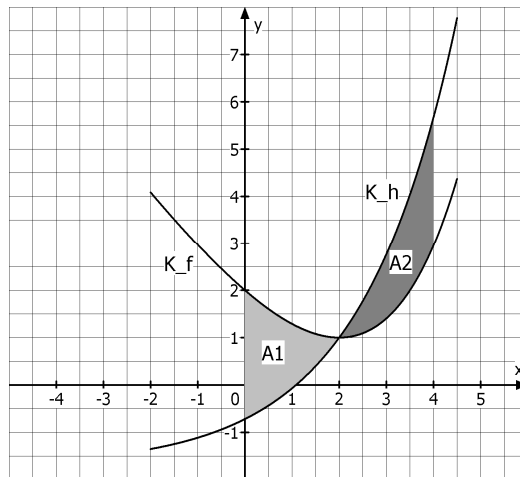
2.4

Es soll gelten: $\int_0^u (f(x) - h(x))dx = 0$

$$\int_0^u \left(e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}ex + 1 - (e^{\frac{1}{2}x} - e + 1) \right) dx = \int_0^u \left(-\frac{1}{2}ex + e \right) dx = \left[-\frac{1}{4}ex^2 + ex \right]_0^u = -\frac{1}{4}eu^2 + eu$$

$$-\frac{1}{4}eu^2 + eu = 0 \Leftrightarrow eu \cdot \left(-\frac{1}{4}u + 1 \right) = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ oder } u = 4.$$

Da $u > 0$ sein soll, ist $u = 4$ die gesuchte Lösung.



Anschaulich bedeutet die Lösung $u = 4$, dass die Fläche A1 zwischen den Schaubildern von f und h im Intervall $0 \leq x \leq 2$ genau so groß ist wie die Fläche A2 im Intervall $2 \leq x \leq 4$.

2.5

Aufstellen der Tangentengleichung in P(2/1):

Mit $h'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$ folgt, dass die Steigung der Tangente $h'(2) = \frac{1}{2}e$ beträgt.

Gleichung der Tangente mit der Punkt-Steigungsform: $y - 1 = \frac{1}{2}e(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}ex - e + 1$

Abstand der Schnittpunkte:

Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse:

$$0 = \frac{1}{2}ex - e + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}ex = e - 1 \Leftrightarrow x = \frac{2e - 2}{e} = 2 - \frac{2}{e} \approx 1,264 \text{ und damit } S_x(2 - \frac{2}{e} | 0)$$

Schnittpunkt des Schaubildes von h mit der x-Achse:

$$h(x) = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}x} - e + 1 = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}x} = e - 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x = \ln(e - 1) \Rightarrow x = 2 \cdot \ln(e - 1) \approx 1,083 \text{ und damit}$$

$$R_x(2 \ln(e - 1) | 0)$$

Der Abstand der Punkte beträgt $2 - \frac{2}{e} - 2 \ln(e - 1) = 1,264 - 1,083 = 0,181$.