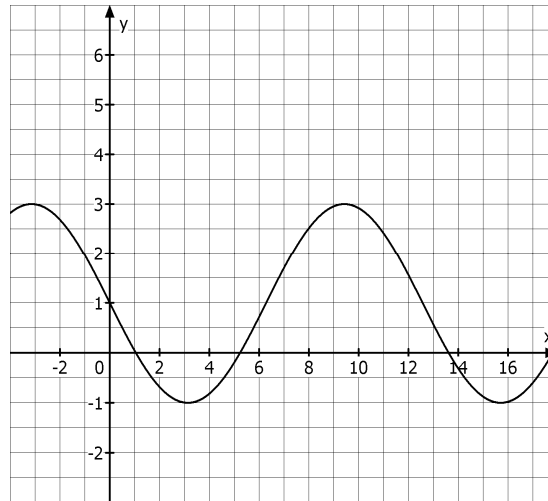


Hauptprüfung 2005 Aufgabe 3

Das gezeichnete Schaubild hat die Gleichung $y = a \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + b$.



3.1

Bestimmen Sie a und b sowie die exakte Periodenlänge.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(6 Punkte)

3.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -3\cos(0,5x) + 1$; $x \in [-7; 7]$.

Ihr Schaubild sei K .

Berechnen Sie für K die exakten Koordinaten der Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

Zeichnen Sie K .

(10 Punkte)

3.3

Zeigen Sie, dass die Gerade t mit der Gleichung $y = 1,5x + 1 - 1,5\pi$ eine Wendetangente von K ist. Berechnen Sie den Inhalt A der Fläche, welche von K , der Wendetangente t und der y -Achse im 1. und 4. Quadranten eingeschlossen wird.

(6 Punkte)

3.4

Gegeben ist die Gerade g mit $y = \frac{3}{\pi}x - 2$, $x \in \mathbb{R}$

Zeichnen Sie die Gerade g in das Koordinatensystem von Aufgabenteil 3.2.

Die Gerade mit $x = u$ ($0 \leq u \leq \pi$) schneidet die Gerade g im Punkt P und das Schaubild K im Punkt Q .

Berechnen Sie u so, dass die Länge der Strecke PQ maximal ist.

(8 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2005 Aufgabe 3

3.1

Der Wertebereich des Schaubildes liegt im Intervall $-1 \leq y \leq 3$.

Die Mitte des Wertebereiches liegt auf der Höhe 1, daher ist das Schaubild um 1 Einheit nach oben verschoben.

Die senkrechte Verschiebung entspricht dem Wert von b und somit gilt $b = 1$.

Der Wert a entspricht der Amplitude des Schaubildes. Die Amplitude entspricht dem senkrechten Abstand von der „waagrechten Mittellinie“ des Schaubildes bis zum Hochpunkt. Da jedoch das Schaubild noch zusätzlich gegenüber der Grundfunktion $y = \sin(x)$ an der x -Achse gespiegelt wurde, ist $a < 0$ und damit gilt $a = -2$.

Die Funktion lautet $y = -2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$ und die exakte Periode beträgt $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

3.2

Es sei $f(x) = -3\cos(0,5x) + 1$.

Ableitungen:

$$f'(x) = 1,5\sin(0,5x) \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{3}{4}\cos(0,5x) \quad \text{und} \quad f'''(x) = -\frac{3}{8}\sin(0,5x)$$

Extrempunkte:

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1,5\sin(0,5x) = 0 \Rightarrow \sin(0,5x) = 0$$

Zunächst wird $u = 0,5x$ substituiert. Daraus folgt $\sin(u) = 0$

Daraus folgt $u_1 = -\pi$ oder $u_2 = 0$ oder $u_3 = \pi$

Die Rücksubstitution ergibt $0,5x_1 = -\pi \Rightarrow x_1 = -2\pi$ bzw. $0,5x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ bzw.

$$0,5x_3 = \pi \Rightarrow x_3 = 2\pi$$

$$f''(-2\pi) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow H_1(-2\pi / f(-2\pi)) \Rightarrow H_1(-2\pi / 4)$$

$$f''(0) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow T_1(0 / f(0)) \Rightarrow T_1(0 / -2)$$

$$f''(2\pi) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow H_2(2\pi / f(2\pi)) \Rightarrow H_2(2\pi / 4)$$

Wendepunkte:

Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}\cos(0,5x) = 0 \Rightarrow \cos(0,5x) = 0$$

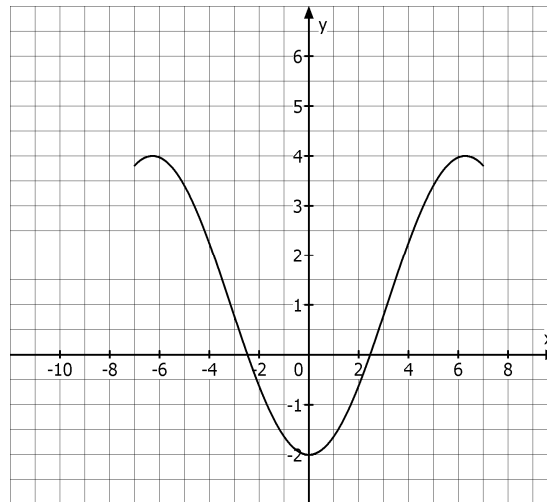
Zunächst wird $u = 0,5x$ substituiert. Daraus folgt $\cos(u) = 0$

$$\text{Daraus folgt } u_1 = -\frac{\pi}{2} \text{ oder } u_2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Die Rücksubstitution ergibt } 0,5x_1 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = -\pi \text{ bzw. } 0,5x_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2 = \pi$$

$$f'''(-\pi) = \frac{3}{8} \neq 0 \Rightarrow W_1(-\pi / f(-\pi)) \Rightarrow W_1(-\pi / 1)$$

$$f'''(\pi) = -\frac{3}{8} \neq 0 \Rightarrow W_2(\pi/f(\pi)) \Rightarrow W_2(\pi/1)$$



3.3

Nachweis der Wendetangente:

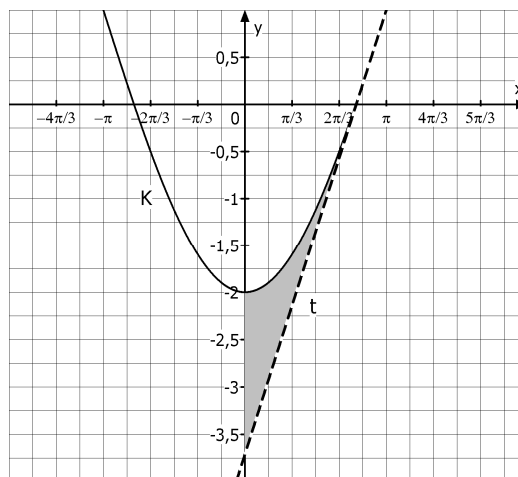
Die gegebene Geradengleichung $y = 1,5x + 1 - 1,5\pi$ besitzt eine positive Steigung $m = 1,5$. Sofern es sich um eine Wendetangente handelt (was zu zeigen ist), kann diese anschaulich nur den Wendepunkt $W_2(\pi/1)$ als Berührungspunkt besitzen.

Steigung der Tangente in W_2 : $f'(\pi) = 1,5 \sin(0,5\pi) = 1,5$ und dies entspricht der Steigung der gegebenen Gerade t .

Punktprobe, ob $W_2(\pi/1)$ auf der Gerade t liegt: $1 = 1,5\pi + 1 - 1,5\pi \Leftrightarrow 1 = 1$ wahre Aussage.

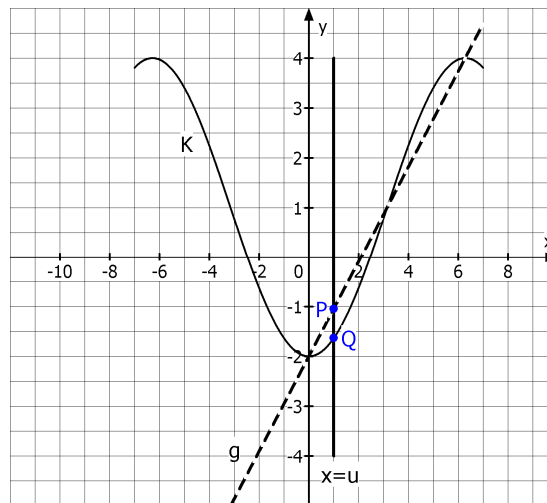
Damit ist die Gerade t die Wendetangente im Wendepunkt W_2 .

Flächenberechnung:



$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} (-3 \cos(0,5x) + 1 - (1,5x + 1 - 1,5\pi)) dx = \int_0^{\pi} (-3 \cos(0,5x) - 1,5x + 1,5\pi) dx \\ &= \left[\frac{-3}{0,5} \sin(0,5x) - \frac{3}{4} x^2 + 1,5\pi \cdot x \right]_0^{\pi} = -6 - \frac{3}{4} \pi^2 + 1,5\pi^2 - 0 = \frac{3}{4} \pi^2 - 6 \approx 1,402 \text{ FE} \end{aligned}$$

3.4



Die Koordinaten der Punkte P und Q lauten $P(u/\frac{3}{\pi}u - 2)$ und $Q(u/f(u))$.

Zu maximieren ist die Strecke $\overline{PQ}$.

Die Zielfunktion lautet $\overline{PQ} = d(u) = \frac{3}{\pi}u - 2 - f(u) = \frac{3}{\pi}u - 2 - (-3\cos(0,5u) + 1)$

Vereinfacht: $d(u) = 3\cos(0,5u) + \frac{3}{\pi}u - 3$

Gesucht ist das Maximum der Funktion $d(u)$ im Bereich $0 \leq u \leq \pi$.

1. Lösungsmöglichkeit: ohne GTR

Hinreichende Bedingung für ein Maximum: $d'(u) = 0$ und $d''(u) < 0$.

$$d'(u) = -1,5\sin(0,5u) + \frac{3}{\pi} \quad \text{und} \quad d''(u) = -0,75\cos(0,5u)$$

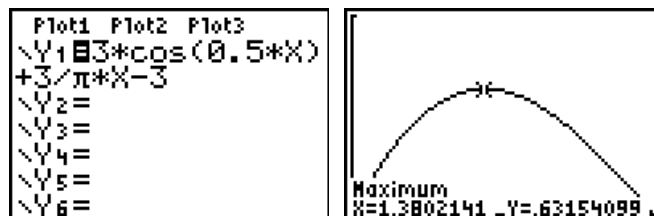
$$d'(u) = 0 \Rightarrow -1,5\sin(0,5u) = -\frac{3}{\pi} \Rightarrow \sin(0,5u) = \frac{2}{\pi} \Rightarrow 0,5u = 0,69 \quad (\text{GTR mit } \boxed{2\text{nd}} \boxed{\sin})$$

$$\Rightarrow u = 1,38$$

Mit $d''(1,38) < 0$ ergibt sich ein relatives Maximum für $u = 1,38$.

Da an den Randwerten $d(0) = 0$ und $d(\pi) = 0$ gilt und $d(1,38) = 0,63$ liegt bei $u = 1,38$ sogar ein absolutes Maximum vor. Die Strecke $\overline{PQ}$ beträgt maximal 0,63 LE.

2. Lösungsmöglichkeit: mit dem GTR



Die Strecke wird maximal für $u = 1,38$. Die maximale Strecke beträgt $d(1,38) = 0,632$ LE.