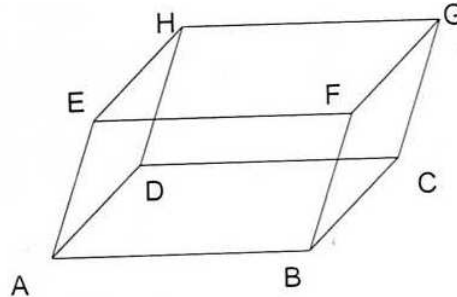


Hauptprüfung 2005 Aufgabe 4

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0/1/0)$, $B(4/4/-1)$, $C(3/6/1)$, $D(-1/3/2)$, $E(0/1/4)$ und $G(3/6/5)$ gegeben.

Die Eckpunkte A, B, C, D, E, F, G und H sind die Eckpunkte eines schiefen Prismas.



4.1

Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte F und H an.

(3 Punkte)

4.2

Weisen Sie nach, dass die Grundfläche ABCD des Prismas ein Rechteck ist.

(4 Punkte)

4.3

Prüfen Sie, ob der Inhalt der Seitenfläche BCGF größer ist als der Inhalt der Grundfläche des Prismas.

(6 Punkte)

4.4

Weisen Sie nach, dass sich die Raumdiagonalen durch die Punkte A und G sowie C und E schneiden.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel

(6 Punkte)

4.5

In welchem Punkt durchstößt die Kante BC die x_1x_2 -Ebene ?

Die Grundfläche ABCD wird durch die x_1x_2 -Ebene in zwei Teilflächen zerteilt.

Begründen Sie anhand einer Skizze, warum eine Teilfläche ein Trapez und die andere Teilfläche ein Dreieck ergibt.

Bestimmen Sie das Verhältnis der Längen der beiden Grundseiten des Trapezes.

(7 Punkte)

4.6

Für einen Punkt P gilt in Bezug auf das schiefe Prisma die Beziehung

$$\overrightarrow{AP} = r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD} + t \cdot \overrightarrow{AE}.$$

Für welche Werte von r, s, t liegt der Punkt P im Innern des Prismas ?

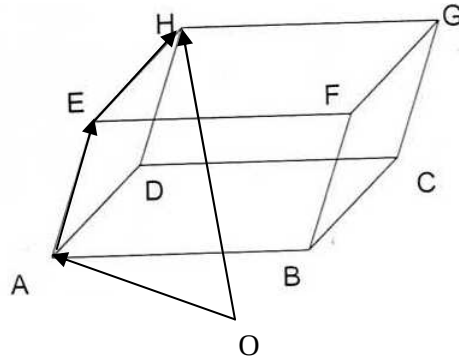
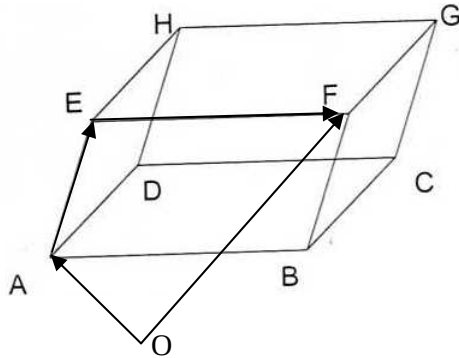
Prüfen Sie, ob der Punkt $P(1,5/3,5/1,5)$ im Innern des Prismas liegt.

(4 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2005 Aufgabe 4

4.1



Berechnung von F: Es gilt $\vec{EF} = \vec{AB}$

Daraus folgt $\vec{OF} = \vec{OA} + \vec{AE} + \vec{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und damit gilt F(4/4/3).

Berechnung von H: Es gilt $\vec{EH} = \vec{BC}$

Daraus folgt $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AE} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und damit H(-1/3/6).

4.2

Zunächst wird gezeigt, dass die Grundfläche ABCD ein Parallelogramm ist.

Bedingung: $\vec{AB} = \vec{DC}$

Es gilt $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{DC}$ und damit ist ABCD ein Parallelogramm.

Das Parallelogramm ist ein Rechteck, wenn $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$ ist (90°-Winkel bei A)

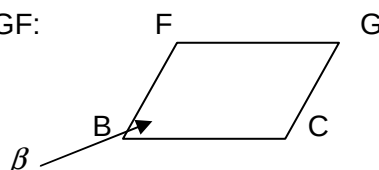
$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = 0$ also liegt ein 90°-Winkel vor.

Damit ist die Grundfläche ABCD ein Rechteck.

4.3

Fläche ABCD: $A_{\text{Rechteck}} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{26} \cdot 3 \approx 15,3$

Fläche des Parallelogramms BCGF:



$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{BC}| \cdot |\vec{BF}| \cdot \sin \beta$$

$$\text{Es gilt } |\vec{BF}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0+0+16} = 4 \text{ und } |\vec{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$\text{Berechnung des Winkels: } \cos \beta = \frac{|\vec{BC} \cdot \vec{BF}|}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{BF}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{0+0+16}} = \frac{8}{12} \Rightarrow \beta = 48,19^\circ$$

$$A_{\text{Parallelogramm}} = 4 \cdot 3 \cdot \sin 48,19^\circ = 8,94 \text{ FE}$$

Damit ist die Seitenfläche kleiner als die Grundfläche.

4.4

$$\text{Geradengleichung durch A und G: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Geradengleichung durch C und E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Da die Richtungsvektoren keine Vielfache sind, sind die Geraden entweder windschief oder sie schneiden sich.

$$3r = 3s$$

$$\text{Gleichsetzen der Gleichungen ergibt: } 1 + 5r = 1 + 5s$$

$$5r = 4 - 3s$$

Aus Zeile 1 folgt: $r = s$

Einsetzen in Zeile 3 ergibt: $5s = 4 - 3s \Rightarrow s = 0,5$ und damit auch $r = 0,5$.

Einsetzen in Zeile 2 ergibt eine wahre Aussage.

Damit besitzt das Gleichungssystem die Lösung $r = s = 0,5$.

Einsetzen von $r = 0,5$ in die Gerade durch A und G ergibt Schnittpunkt $S(1,5/3,5/2,5)$.

$$\text{Schnittwinkel der Geraden: } \cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9+25+25} \cdot \sqrt{9+25+9}} = \frac{19}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{43}} \Rightarrow \alpha = 67,8^\circ$$

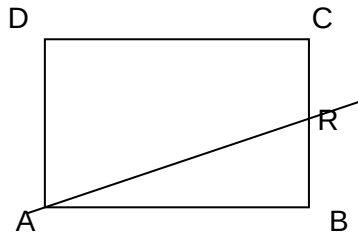
4.5

$$\text{Geradengleichung durch B und C: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für die $x_1 - x_2$ -Ebene gilt $x_3 = 0$.

Der Durchstoßpunkt R ergibt sich durch $x_3 = -1 + 2r = 0 \Rightarrow r = 0,5$

Einsetzen in die Gerade ergibt $R(3,5/5/0)$.



Der Punkt A liegt auf der $x_1 - x_2$ -Ebene.

Um zu ermitteln, wie R die Strecke $\overline{BC}$ teilt, wird folgender Ansatz gewählt: $\overline{BR} = t \cdot \overline{BC}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und daraus folgt } t = 0,5.$$

Damit liegt R genau in der Mitte der Kante $\overline{BC}$.

Das Verhältnis der Grundseiten $\overline{AD}$ und $\overline{RC}$ des Trapezes ARCD stehen im Verhältnis 2:1

4.6

Der Punkt P liegt im Innern, wenn $0 < r < 1$ und $0 < s < 1$ und $0 < t < 1$ gilt.

Prüfung für $P(1,5/3,5/1,5)$: $\overline{AP} = r \cdot \overline{AB} + s \cdot \overline{AD} + t \cdot \overline{AE}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

MATRIX[A] 3 x4 $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} =$	rref([A]) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .5 \\ 0 & 1 & 0 & .5 \\ 0 & 0 & 1 & .25 \end{bmatrix}$
1, 1=4	

Die Lösungen lauten $r = 0,5$; $t = 0,5$; $s = 0,25$ und damit liegt P im Innern des Prismas, da alle 3 Variablen zwischen 0 und 1 liegen.