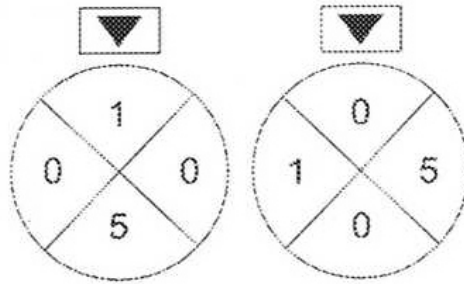


Hauptprüfung 2005 Aufgabe 6 (Stochastik)

Für ein Schulfest plant eine Klasse folgendes Gewinnspiel:
 Es werden zwei gleiche Glücksräder verwendet, die gemäß der Abbildung in vier gleich große Sektoren mit den Ziffern 0, 1, 0, 5 eingeteilt sind.
 Jedes Feld kann nach der Betätigung der Räder mit der gleichen Wahrscheinlichkeit angezeigt werden. Für ein Spiel wird jede der beiden Scheiben einmal gedreht. Die Höhe des Gewinnes hängt von den beiden angezeigten Ziffern ab.



Einsatz und Gewinnchancen zeigt folgendes Plakat an:

Ein Spiel kostet 1€.

Gewinnchancen:

Beide Ziffern gleich:	2 €
Ungleiche Ziffern <u>und</u> Ziffernsumme mindestens 5:	0,40 €
Andere Ziffernpaare:	Verloren

6.1

Erstellen Sie für ein Spiel ein geeignetes Baumdiagramm und geben Sie für jedes mögliche Ziffernpaar die zugehörige Wahrscheinlichkeit an. (6 Punkte)

6.2

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Die Ziffernsumme ist 10.

B: Die Ziffernsumme beträgt mindestens 5.

C: Das Ziffernpaar ist nicht 55.

D: Mindestens ein Glücksrad zeigt die Ziffer 0 an. (6 Punkte)

6.3

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Verlauf von drei Spielen genau zweimal gleiche Ziffern erscheinen ?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Verlauf von drei Spielen höchstens einmal gleiche Ziffern erscheinen ? (7 Punkte)

6.4

Geben Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit an, mit der einem Spieler 2€ bzw. 0,40 € bzw. 0€ ausbezahlt werden. (4 Punkte)

6.5

Berechnen Sie den erwarteten Auszahlungsbetrag für 10 Spiele. Wie viel Gewinn bleibt dabei der Klasse ? (3 Punkte)

6.6

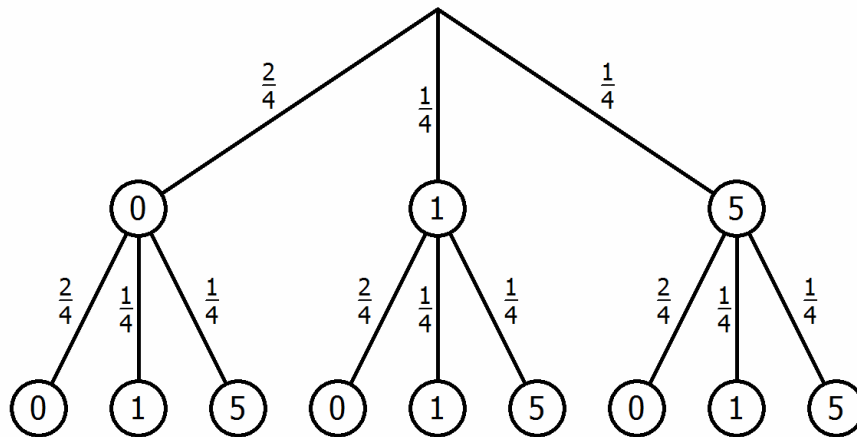
Ermitteln Sie, wie hoch der Auszahlungsbetrag bei gleichen Ziffern höchstens sein darf,
damit die Klasse langfristig keinen Verlust erwarten muss. (4 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2005 Aufgabe 6 (Stochastik)

6.1

Baumdiagramm:



Wahrscheinlichkeiten für jedes mögliche Ziffern paar:

$$P(0;0) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4} \quad P(0;1) = P(0;5) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \quad P(1;0) = P(5;0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P(1;1) = P(1;5) = P(5;1) = P(5;5) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

6.2

$$P(A) = P(5;5) = \frac{1}{16} \quad P(B) = P(0;5) + P(5;0) + P(1;5) + P(5;1) + P(5;5) = 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$

$$P(C) = 1 - P(5;5) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \quad P(D) = 1 - P(\text{kein Rad zeigt die „0“}) = 1 - 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{4}$$

6.3

$$\text{Wahrscheinlichkeit für zwei gleiche Ziffern in einem Spiel: } P(0;0) + P(1;1) + P(5;5) = \frac{3}{8}$$

$$\text{Wahrscheinlichkeit für unterschiedliche Ziffern: } P(\text{unterschiedliche Ziffern}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$P(\text{genau zweimal gleiche Ziffern bei 3 Spielen}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot 3 = \frac{135}{512}$$

Der Faktor 3 ergibt sich dadurch, dass das Spiel mit unterschiedlichen Ziffern beim 1. Spiel, 2. Spiel oder 3. Spiel auftreten kann und die Reihenfolge keine Rolle spielt.

$$P(\text{höchstens einmal gleiche Ziffern bei 3 Spielen}) =$$

$$P(\text{Ziffern sind dreimal unterschiedlich}) + P(\text{Ziffern sind genau einmal gleich}) =$$

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{175}{256}$$

6.4

$$P(2 \text{ Euro Auszahlung}) = P(\text{zwei gleiche Ziffern}) = \frac{3}{8} \quad (\text{siehe 6.3})$$

$$P(0,4 \text{ Euro Auszahlung}) = P(1;5) + P(5;1) + P(0;5) + P(5;0) = \frac{3}{8}$$

$$P(0 \text{ Euro Auszahlung}) = 1 - \frac{3}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

6.5

$$\text{Erwartete Auszahlung für 10 Spiele} = 10 \cdot \left(2 \cdot \frac{3}{8} + 0,4 \cdot \frac{3}{8}\right) = 9 \text{ Euro}$$

$$\text{Erwarteter Gewinn bei 10 Spielen} = 10 - 9 = 1 \text{ Euro}$$

6.6

Die Auszahlung bei zwei gleichen Ziffern sei a Euro.

$$\text{Erwartete Auszahlung bei 10 Spielen} = 10 \cdot \left(a \cdot \frac{3}{8} + 0,4 \cdot \frac{3}{8}\right)$$

$$\text{Nun soll gelten: } 10 \cdot \left(a \cdot \frac{3}{8} + 0,4 \cdot \frac{3}{8}\right) = 10 \Leftrightarrow a = 2,2\bar{6} \text{ Euro}$$

Der Auszahlungsbetrag für gleiche Ziffern darf maximal 2,26 Euro betragen.