

Hauptprüfung 2005 Aufgabe 7

7.1

Die Gesamtkostenfunktion eines Unternehmens ist durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades bestimmt. Der Verkaufspreis je ME (Mengeneinheit) beträgt 60 GE (Geldeinheiten). Bei einer Produktionsmenge von 10 ME liegt das Minimum der Grenzkosten. Bei dieser Produktionsmenge gilt außerdem: Die Kosten sind gerade gedeckt, die variablen Stückkosten betragen 30 GE und die Grenzkosten 20 GE. Bestimmen Sie den Funktionsterm dieser Funktion. (7 Punkte)

7.2

Die Gesamtkostenfunktion K ist gegeben durch

$$K(x) = 0,1x^3 - 3x^2 + 50x + 300$$

Die lineare Funktion E ist durch den Verkaufspreis von 60 GE pro ME bestimmt.

7.2.1

Zeichnen Sie die Schaubilder von K und E in ein geeignetes Koordinatensystem. (4 Punkte)

7.2.2

Berechnen Sie Nutzensgrenze und Nutzenschwelle. (4 Punkte)

7.2.3

Berechnen Sie den maximalen Gewinn. (4 Punkte)

7.2.4

Bei welcher Produktionsmenge ist der Gewinn pro Stück maximal ? Begründen Sie: Im Betriebsoptimum ist der Gewinn pro Stück maximal. (5 Punkte)

7.2.5

In welchem Verhältnis stehen die Produktionsmenge mit minimalen Grenzkosten und die Produktionsmenge, bei der die variablen Stückkosten minimal sind ?

Berechnen Sie die oben beschriebenen Produktionsmengen für eine beliebige

Kostenfunktion K mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Welcher Wert ergibt sich nun für das Verhältnis der Produktionsmengen ? (6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2005 Aufgabe 7

7.1

Ansatz für die Kostenfunktion: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

mit $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $K''(x) = 6ax + 2b$

variable Stückkosten: $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = ax^2 + bx + c$

Für die Erlösfunktion gilt: $E(x) = 60x$ (Verkaufspreis 60 GE je ME)

Bedingungen für die Kostenfunktion:

$K''(10) = 0 \Rightarrow 60a + 2b = 0$ (Minimum der Grenzkostenfunktion K' bei $x = 10$)

$K(10) = E(10) \Rightarrow 1000a + 100b + 10c + d = 600$ (Kostendeckung bei $x = 10$)

$k_v(10) = 30 \Rightarrow 100a + 10b + c = 30$ (variable Stückkosten betragen 30 GE)

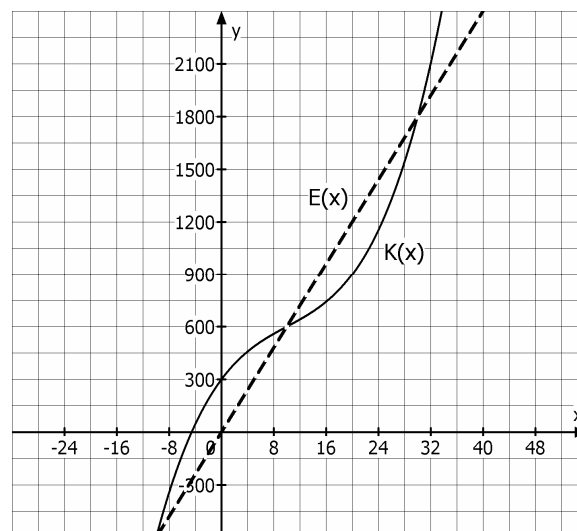
$K'(10) = 20 \Rightarrow 300a + 20b + c = 20$ (Grenzkosten betragen 20 GE)

Lösung des Gleichungssystems mit dem GTR:

MATRIX[A] 4 x5 <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">[60</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">-</td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">[1000</td><td style="padding: 2px 10px;">100</td><td style="padding: 2px 10px;">10</td><td style="padding: 2px 10px;">-</td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">[100</td><td style="padding: 2px 10px;">10</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">-</td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">[300</td><td style="padding: 2px 10px;">20</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">-</td><td style="padding: 2px 10px;"></td></tr></table> 1,1=60	[60	2	0	-		[1000	100	10	-		[100	10	1	-		[300	20	1	-		rref([A]) <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">[1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">.1</td></tr><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">[0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">-3</td></tr><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">[0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">50</td></tr><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">[0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">300</td></tr></table>	[1	0	0	0	.1	[0	1	0	0	-3	[0	0	1	0	50	[0	0	0	1	300
[60	2	0	-																																						
[1000	100	10	-																																						
[100	10	1	-																																						
[300	20	1	-																																						
[1	0	0	0	.1																																					
[0	1	0	0	-3																																					
[0	0	1	0	50																																					
[0	0	0	1	300																																					

Es gilt $a = 0,1$; $b = -3$; $c = 50$; $d = 300$ und damit $K(x) = 0,1x^3 - 3x^2 + 50x + 300$

7.2.1

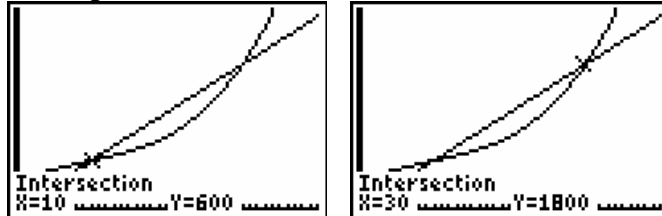


7.2.2

Die Nutzenschwelle und Nutzengrenze sind die Schnittpunkte von $K(x)$ und $E(x)$.

$$K(x) = E(x) \Rightarrow 0,1x^3 - 3x^2 + 50x + 300 = 60x$$

Lösung mit dem GTR:



Die Nutzenschwelle liegt bei $x = 10$, die Nutzengrenze bei $x = 30$.

7.2.3

Die Gewinnfunktion lautet $G(x) = E(x) - K(x) = -0,1x^3 + 3x^2 + 10x - 300$

1. Lösungsmöglichkeit: ohne GTR

Hinreichende Bedingung für maximalen Gewinn: $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$

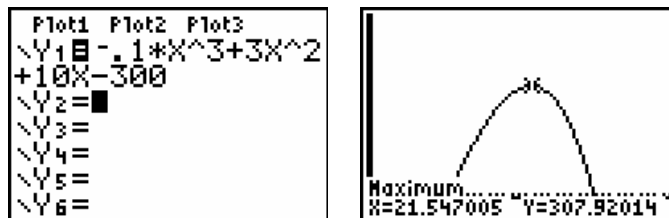
$$G'(x) = -0,3x^2 + 6x + 10 \text{ und } G''(x) = -0,6x + 6$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow -0,3x^2 + 6x + 10 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 12}}{-0,6} \Rightarrow x_1 = -1,55 \text{ und } x_2 = 21,55$$

$$G''(21,55) < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

Der maximale Gewinn beträgt $G(21,55) = 307,92$ GE

2. Lösungsmöglichkeit: mit GTR



Maximaler Gewinn von 307,92 GE für $x = 21,55$ ME.

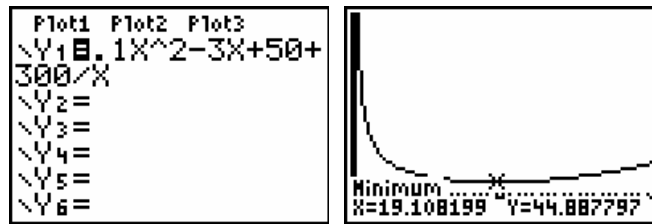
7.2.4

Das Betriebsoptimum ist die Stelle, an der die Stückkosten minimal sind.

Da der Preis konstant ist, liegt das Maximum des Stückgewinns an der Stelle, an der die Stückkosten minimal sind, also beim Betriebsoptimum.

Gesucht: Minimum der Stückkostenfunktion $k(x) = \frac{K(x)}{x} = 0,1x^2 - 3x + 50 + \frac{300}{x}$

Lösung mit GTR:



Für $x = 19,11$ ME sind die Stückkosten minimal und damit der Gewinn pro Stück maximal.

7.2.5

Hinreichende Bedingung für minimale Grenzkosten $K'(x)$:

$$K''(x) = 0 \text{ und } K'''(x) > 0$$

$$K''(x) = 0 \Rightarrow 0,6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 10$$

$$K'''(10) > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Hinreichende Bedingung für minimale variable Stückkosten $k_v(x)$:

$$k'_v(x) = 0 \text{ und } k''_v(x) > 0$$

$$\text{Es gilt } k_v(x) = 0,1x^2 - 3x + 50 \text{ und } k'_v(x) = 0,2x - 3 \text{ und } k''_v(x) = 0,2$$

$$k'_v(x) = 0 \Rightarrow 0,2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 15$$

$$k''_v(15) > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Damit stehen die Produktionsmengen im Verhältnis $10 : 15 = 2 : 3$

Nun sei eine allgemeine Kostenfunktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gegeben.

$$\text{Es gilt } K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ und } K''(x) = 6ax + 2b.$$

$$\text{Außerdem gilt } k_v(x) = ax^2 + bx + c \text{ und } k'_v(x) = 2ax + b$$

$$\text{Minimale Grenzkosten: } K''(x) = 0 \Rightarrow 6ax + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{3a}$$

$$\text{Minimale variable Stückkosten: } k'_v(x) = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

$$\text{Verhältnis: } -\frac{b}{3a} : \left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b}{3a} \cdot \frac{2a}{b} = \frac{2}{3}$$

Somit gilt immer das Verhältnis 2:3, unabhängig von der konkreten Kostenfunktion.