

Hauptprüfung 2004 Aufgabe 1

1.1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$

Ihr Schaubild ist K_f .

Berechnen Sie die exakten Koordinaten der Schnittpunkte von K_f mit der x -Achse und die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte von K_f . In welchem Intervall ist K_f linksgekrümmt? (exakte Intervallgrenzen).

Zeichnen Sie K_f für $x \in [-3;3]$.

(9 Punkte)

1.2

Eine nach unten geöffnete Parabel K_p 2.Ordnung ist symmetrisch zur y -Achse und schneidet K_f in $P(-2/2)$.

K_f und K_p schließen zwischen $x = -2$ und $x = 2$ eine Fläche mit dem Inhalt 9,6 ein.

Berechnen Sie die Funktionsgleichung dieser Parabel.

Zeichnen Sie K_p in das Koordinatensystem von 1.1 ein.

Welche weiteren Schnittpunkte haben K_f und K_p ?

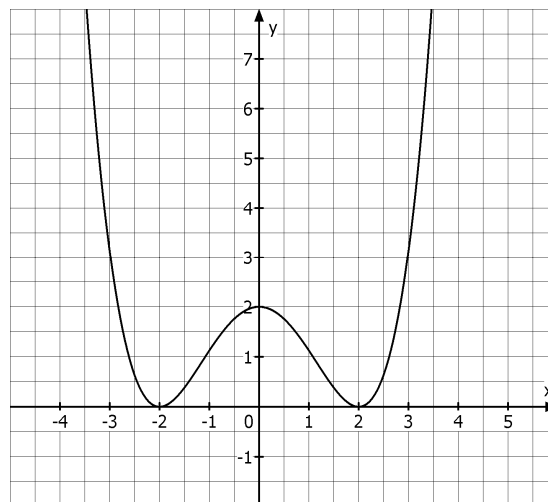
(9 Punkte)

1.3

Die gezeichnete Kurve ist das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 4.Grades.

Ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm.

(6 Punkte)



1.4

Die Kurve aus 1.3 und die x -Achse schließen eine Fläche ein.

Übertragen Sie die Kurve auf Ihr Blatt und zeichnen Sie in diese Fläche ein achsenparalleles Rechteck ein, von dem zwei Eckpunkte auf der Kurve und zwei Eckpunkte auf der x -Achse liegen.

Erläutern Sie, wie man das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt ermitteln kann.

(6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2004 Aufgabe 1

1.1

Schnittpunkte mit der x-Achse:

Setze $f(x) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}x^4 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left(-\frac{1}{8}x^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0 \text{ oder } x^2 = 8$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = 0 \text{ oder } x_{3,4} = \pm\sqrt{8} = \pm 2 \cdot \sqrt{2}$$

Die Nullstellen lauten $N_{1,2}(0/0)$ und $N_{3,4}(\pm 2 \cdot \sqrt{2}/0)$.

Ableitungen:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x \text{ und } f''(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2 \text{ und } f'''(x) = -3x$$

Extrempunkte:

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x_{2,3} = \pm 2$$

$$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{TP}(0/f(0)) \Rightarrow \text{TP}(0/0)$$

$$f''(-2) = -4 < 0 \Rightarrow \text{HP}(-2/f(-2)) \Rightarrow \text{HP}_1(-2/2)$$

$$f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow \text{HP}(2/f(2)) \Rightarrow \text{HP}_2(2/2)$$

Linkskrümmung:

Die Wendepunkte stellen die Übergangspunkte zwischen dem rechts- und linksgekrümmten Teil eines Schaubildes dar.

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

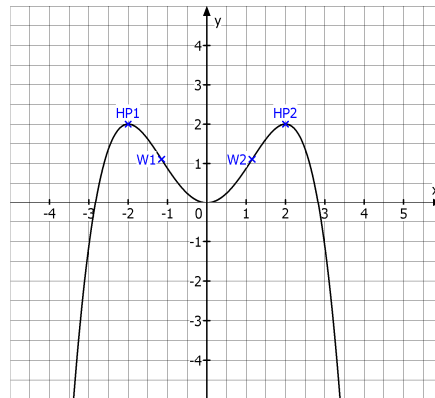
$$f'''(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}) \neq 0 \Rightarrow \text{WP}$$

Für $x < -\sqrt{\frac{4}{3}}$ (z.B. für $x = -3$) gilt $f''(x) < 0$, dort ist das Schaubild rechtsgekrümmt.

Für $-\sqrt{\frac{4}{3}} < x < \sqrt{\frac{4}{3}}$ (z.B. für $x = 0$) gilt $f''(x) > 0$, dort ist das Schaubild linksgekrümmt.

Für $x > \sqrt{\frac{4}{3}}$ (z.B. für $x = 3$) gilt $f''(x) < 0$, dort ist das Schaubild rechtsgekrümmt.

Schaubild:



1.2

Funktionsgleichung der Parabel:

Die gesuchte Parabelfunktion besitzt den Ansatz $p(x) = ax^2 + c$
(aufgrund der Symmetrie zur y-Achse existieren nur gerade Hochzahlen)

P(-2/2) liegt auf der Parabel: $p(-2) = 2 \Rightarrow 4a + c = 2$ (*)

Außerdem ist bekannt, dass gilt: $\int_{-2}^2 (p(x) - f(x)) dx = 9,6 \Rightarrow \int_0^2 (p(x) - f(x)) dx = 4,8$

$$\Rightarrow \int_0^2 (ax^2 + c - (-\frac{1}{8}x^4 + x^2)) dx = \left[\frac{1}{3}ax^3 + cx + \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}a + 2c - \frac{28}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3}a + 2c - \frac{28}{15} = 4,8 \quad (**)$$

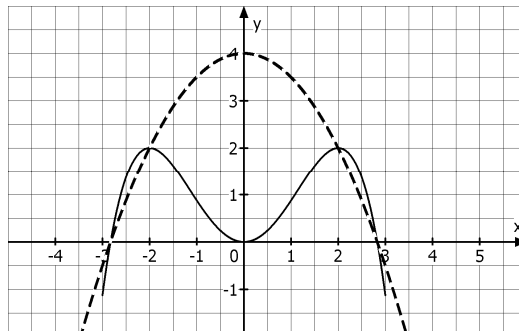
Aus (*) folgt $c = 2 - 4a$

$$\text{Eingesetzt in (**): } \frac{8}{3}a + 2(2 - 4a) - \frac{28}{15} = 4,8 \Rightarrow -\frac{16}{3}a = \frac{8}{3} \Rightarrow a = -0,5$$

Daraus folgt $c = 2 + 2 = 4$

Die Parabelgleichung lautet $p(x) = -0,5x^2 + 4$.

Schaubild



Schnittpunkte der Schaubilder:

Ansatz: $f(x) = p(x)$

1. Lösungsmöglichkeit: ohne GTR

$$-\frac{1}{8}x^4 + x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 4 \quad | \cdot 8 \quad \Rightarrow -x^4 + 12x^2 - 32 = 0$$

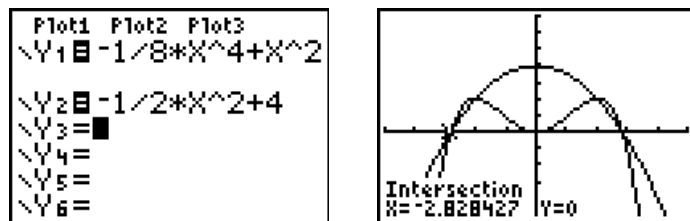
Mit Substitution $x^2 = u$ folgt $-u^2 + 12u - 32 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 128}}{-2} = \frac{-12 \pm 4}{-2}$

Es gilt $u_1 = 4$ und nach Rücksubstitution: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ (bereits bekannt)

Es gilt $u_2 = 8$ und nach Rücksubstitution $x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

Die weiteren Schnittpunkte lauten $Q_1(\sqrt{8}/0)$ und $Q_2(-\sqrt{8}/0)$

2. Lösungsmöglichkeit: mit dem GTR



Mit dem GTR ergeben sich folgende Schnittpunkte:

$$S_1(-2/2), S_2(2/2), S_3(-2,82/0) = S_3(-\sqrt{8}/0) \text{ und } S_4(2,82/0) = S_4(\sqrt{8}/0)$$

1.3

1. Lösungsmöglichkeit:

Von dem Schaubild sind alle Nullstellen bekannt. Da bei $x = -2$ und $x = 2$ eine doppelte Nullstelle vorliegt (da dort Extrempunkte vorliegen), kann die Funktion als Linearfaktorzerlegung folgendermaßen aufgestellt werden:

$$h(x) = a \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 2)^2$$

$P(0/2)$ liegt auf dem Schaubild: $h(0) = 2 \Rightarrow 2 = a \cdot 16 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$

Daraus folgt $h(x) = \frac{1}{8}(x - 2)^2(x + 2)^2 = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$

2. Lösungsmöglichkeit:

Das Schaubild ist symmetrisch zur y-Achse.

Ansatz mit geraden Hochzahlen: $h(x) = ax^4 + bx^2 + c$ und $h'(x) = 4ax^3 + 2bx$

$P(0/2)$ liegt auf dem Schaubild: $h(0) = 2 \Rightarrow c = 2$ (1)

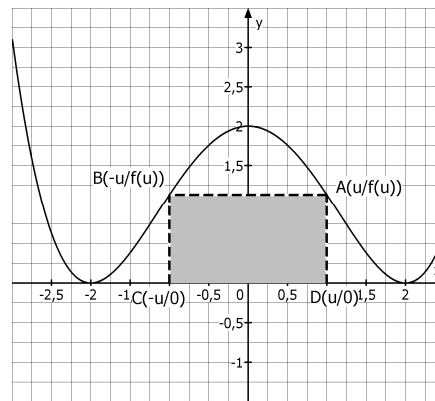
$N(2/0)$ liegt auf dem Schaubild: $h(2) = 0 \Rightarrow 16a + 4b + c = 0$ (2)

Waagrechte Tangente bei $N(2/0)$: $h'(2) = 0 \Rightarrow 32a + 4b = 0$ (3)

Aus (1) bis (3) folgt $a = \frac{1}{8}$; $b = -1$; $c = 2$

Daraus folgt $h(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$

1.4



Die Fläche des Rechtecks beträgt $A = \overline{CD} \cdot \overline{AD}$

Es gilt $\overline{CD} = u - (-u) = 2u$ und $\overline{AD} = h(u) - 0 = h(u)$

Für die Fläche gilt die Zielfunktion $A(u) = 2u \cdot h(u) = 2u \cdot \left(\frac{1}{8}u^4 - u^2 + 2 \right)$ mit $0 < u < 2$

Für die Ermittlung des Maximums der Zielfunktion muss zunächst das lokale Maximum (Hochpunkt) des Schaubilds von $A(u)$ ermittelt werden:

Hinreichende Bedingung: $A'(u) = 0$ und $A''(u) \neq 0$

Um das globale Maximum (also der höchste Punkt des Schaubildes) im Intervall $0 < u < 2$ zu ermitteln, müssen neben dem lokalen Maximum auch die Funktionswerte am Rand des Intervalls bestimmt werden.

Es gilt $A(0) = 0$ (linker Randwert) und $A(2) = 0$ (rechter Randwert) somit kann dort kein globales Maximum vorliegen.