

Hauptprüfung 2004 Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4e^{\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$ und die Gerade g mit

$y = -\frac{2}{e}x + \frac{8}{e}$. Das Schaubild von f wird mit K_f bezeichnet.

2.1

Zeichnen Sie K_f und die Gerade g für $-1 \leq x \leq 4$ in ein Koordinatensystem.

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade g das Schaubild K_f an der Stelle $x_1 = 2$ berührt.

Geben Sie die Koordinaten dieses Punktes exakt an. (7 Punkte)

2.2

Wie viel Prozent des Funktionswertes von $f(x)$ beträgt $f(x+1)$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$?

(4 Punkte)

2.3

Die Gerade g wird um den Punkt $S(2/\frac{4}{e})$ so gedreht, dass sie K_f im Punkt $Q(0/4)$ schneidet.

Diese neue Gerade wird mit h bezeichnet.

Geben Sie die Gleichung von h exakt an. Zeichnen Sie h in das vorhandene Koordinatensystem ein. Begründen Sie, dass K_f und h keine weiteren gemeinsamen Punkte haben.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die K_f mit der Geraden h einschließt.

(9 Punkte)

2.4

Eine Parallele zur y -Achse schneidet K_f im Punkt A und die Gerade mit der Gleichung

$y = \left(\frac{2}{e} - 2\right) \cdot x + 4$ im Punkt B . Berechnen Sie die Stelle u mit $0 \leq u \leq 2$, an welcher der

Abstand der Punkte A und B maximal wird.

(5 Punkte)

2.5

Vom Punkt $R(2/0)$ aus wird eine Tangente t an K_f gelegt. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T , in dem die Tangente t das Schaubild K_f berührt. Geben Sie die Gleichung der Tangente t an und bestimmen Sie den Winkel, unter dem t die x -Achse schneidet.

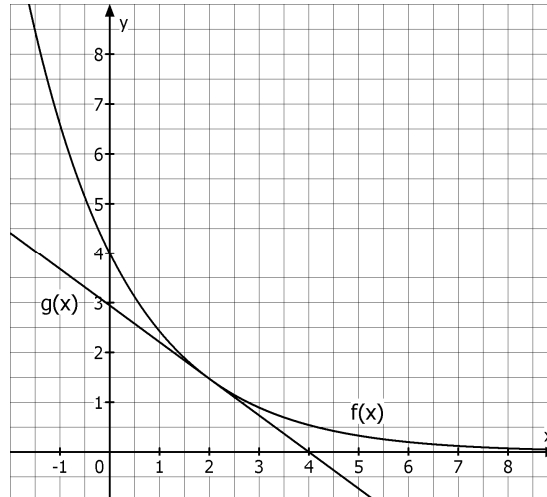
(5 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2004 Aufgabe 2

2.1

Schaubild:



Nachweis Berührung:

Die Schaubilder berühren sich bei $x = 2$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1.) $f(2) = g(2)$: Da $f(2) = 4e^{-1} = \frac{4}{e} = g(2)$ gilt, ist diese Bedingung erfüllt.

2.) $f'(2) = g'(2)$: Mit $f'(x) = -2e^{-\frac{x}{2}}$ und $g'(x) = -\frac{2}{e}$ folgt $f'(2) = -2e^{-1} = -\frac{2}{e} = g'(2)$

Somit ist auch diese Bedingung erfüllt.

Damit ist die Berührung an der Stelle $x = 2$ bewiesen.

Der Berührungspunkt hat die Koordinaten $P(2/f(2)) = P(2/\frac{4}{e})$.

2.2

Es gilt $f(x+1) = 4 \cdot e^{-\frac{x+1}{2}} = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot e^{-\frac{1}{2}}$

Der prozentuale Anteil von $f(x+1)$ bezüglich $f(x)$ beträgt

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}} = e^{-\frac{1}{2}} = 0,607 = 60,7\%$$

$f(x+1)$ besitzt 60,7% des Funktionswertes von $f(x)$.

2.3

Geradengleichung von h:

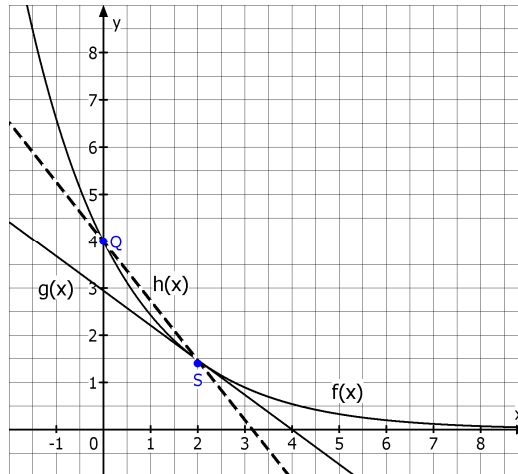
Ansatz der Geradengleichung: $y = m \cdot x + c$

Punkt Q(0/4) liegt auf h: $4 = m \cdot 0 + c \Rightarrow c = 4$

Punkt S(2/ $\frac{4}{e}$) liegt auf h: $\frac{4}{e} = 2m + c \Rightarrow 2m = \frac{4}{e} - 4 \Rightarrow m = \frac{2}{e} - 2$

Die Gleichung von h lautet: $y = \left(\frac{2}{e} - 2\right)x + 4 \approx -1,26x + 4$

Schaubild mit h:



Begründung, dass das Schaubild von h und f keine weiteren gemeinsamen Punkte haben:

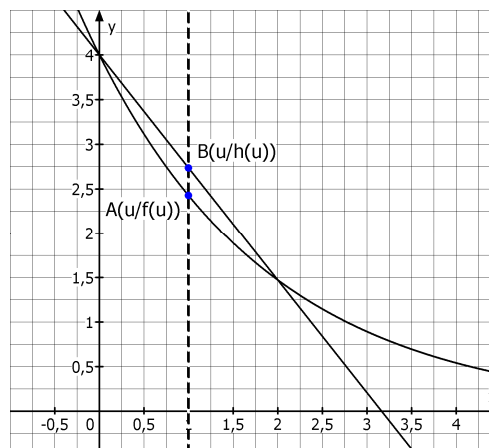
Es gilt $f'(x) = -2e^{-\frac{x}{2}}$ und $f''(x) = e^{-\frac{x}{2}} > 0$

Das positive Vorzeichen der 2. Ableitung besagt, dass das Schaubild von f linksgekrümmt ist. Da die Gerade h diese Krümmung nicht besitzt gibt es rechts von S bzw. links von Q keine weiteren gemeinsamen Punkte.

Flächenberechnung

$$\begin{aligned}
 \text{Es gilt } A &= \int_0^2 (h(x) - f(x)) dx = \int_0^2 \left(\left(\frac{2}{e} - 2 \right)x + 4 - 4e^{-\frac{x}{2}} \right) dx = \left[\left(\frac{2}{e} - 2 \right) \cdot \frac{x^2}{2} + 4x + 8e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^2 \\
 &= \left(\frac{2}{e} - 2 \right) \cdot 2 + 8 + 8e^{-1} - 8 = \frac{4}{e} - 4 + 8 + 8e^{-1} - 8 = 12e^{-1} - 4 \approx 0,415 \text{ FE}
 \end{aligned}$$

2.4



Zu maximieren ist die Strecke $\overline{AB}$.

Aufgrund der Koordinaten von A und B gilt $d(u) = \overline{AB} = h(u) - f(u)$

$$\text{Es gilt } d(u) = \left(\frac{2}{e} - 2\right) \cdot u + 4 - 4e^{-\frac{u}{2}}$$

1. Lösungsmöglichkeit: ohne GTR

Hinreichende Bedingung für Maximum: $d'(u) = 0$ und $d''(u) < 0$

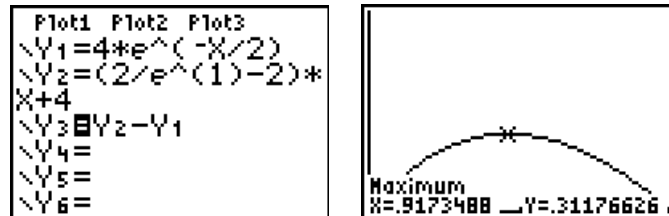
$$d'(u) = \frac{2}{e} - 2 + 2 \cdot e^{-\frac{u}{2}} \quad \text{und} \quad d''(u) = -e^{-\frac{u}{2}}$$

$$d'(u) = 0 \Rightarrow e^{-\frac{u}{2}} = 1 - \frac{1}{e} \Rightarrow u = -2 \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0,918$$

$$d''(0,918) < 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum für } u = 0,918$$

Es gilt $d(0,918) = 0,312$. Da an den Randwerten gilt $d(0) = 0$ und $d(2) = 0$, liegt für $u = 0,918$ sogar ein absolutes Maximum vor.

2. Lösungsmöglichkeit: mit GTR



Mit dem GTR ergibt sich, dass der Abstand für $u = 0,917$ maximal wird. Die maximale Streckenlänge beträgt 0,312 LE.

2.5

Berührungspunkt und Tangentengleichung:

Vom Punkt $R(2/0)$ aus sollen Tangenten an das Schaubild von f gelegt werden.

Der gesuchte Berührungspunkt der Tangente an das Schaubild sei $B(u/f(u))$.

Die Tangentensteigung im Punkt B beträgt $m_{\text{tang}} = f'(u)$.

Allgemeine Tangentengleichung in B mit der Punkt-Steigungs-Form:

$$y - f(u) = f'(u) \cdot (x - u) \Leftrightarrow y - 4e^{-\frac{u}{2}} = -2e^{-\frac{u}{2}}(x - u)$$

In diese allgemeine Tangentengleichung in B werden nun die Koordinaten von R eingesetzt:

$$0 - 4e^{-\frac{u}{2}} = -2e^{-\frac{u}{2}}(2 - u) \Leftrightarrow 0 = 2u \cdot e^{-\frac{u}{2}}$$

Daraus folgt als einzige Lösung $u = 0$.

$u = 0$ in $B(u/f(u))$ eingesetzt liefert den Berührungspunkt: $B(0/f(0)) = B(0/4)$

$u = 0$ in die allgemeine Tangentengleichung eingesetzt liefert die gesuchte Tangente:

t: $y - 4e^0 = -2e^0(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 4$ ist die gesuchte Tangentengleichung.

Steigungswinkel:

Anhand der Steigung $m = -2$ der Tangente kann der Winkel mit der x-Achse bestimmt werden: $m = \tan \alpha \Rightarrow -2 = \tan \alpha \Rightarrow \alpha = -63,43^\circ \quad (+180^\circ) = 116,6^\circ$

(Die 180° -Korrektur ist erforderlich, weil der Steigungswinkel entgegen dem Uhrzeigersinn ab der x-Achse gemessen wird. Der negative Winkel $-63,43^\circ$ bedeutet, dass von der x-Achse aus im Uhrzeigersinn der Winkel gemessen wird).