

Hauptprüfung 2004 Aufgabe 4

4.1

Gegeben sind die Punkte A(3/3/6) und B(5/1,5/3).

Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden durch A und B.

(2 Punkte)

4.2

Berechnen Sie den Spurpunkt S_3 der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ in der

$x_1 - x_2$ -Ebene. Der Punkt C ist die orthogonale Projektion des Punktes A auf die

$x_1 - x_2$ -Ebene. Geben Sie die Koordinaten von C an.

(4 Punkte)

4.3

Berechnen Sie alle Winkel und den Flächeninhalt des Dreiecks SCA mit S(7/0/0) und C(3/3/0).

(3 Punkte)

4.4

Das Dreieck S'C'A' entsteht durch orthogonale Projektion des Dreiecks SCA auf die $x_1 - x_3$ -Ebene. Zeichnen Sie beide Dreiecke mit ihren Projektionsgeraden in ein räumliches Koordinatensystem (x_2 - und x_3 -Achse mit 1 LE = 1cm; x_1 -Achse mit dem Schrägwinkel 45°

und 1 LE = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm).

(7 Punkte)

4.5

Die Dreiecke SCA und S'C'A' bilden zusammen mit den Projektionsgeraden einen Körper. Berechnen Sie den Inhalt dieses Körpers.

(4 Punkte)

4.6

Eine Gerade h mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ geht durch A. Berechnen Sie die

Koordinaten der beiden Punkte auf der Geraden h, die vom Punkt A den Abstand 2,5 haben.

(6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2004 Aufgabe 4

4.1

Geradengleichung durch A und B: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1,5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$

Der Richtungsvektor kann beliebig vervielfacht werden: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

4.2

Spurpunkt von g:

Für den Spurpunkt S_3 der Gerade g gilt: $x_3 = 0$

$$x_3 = 6 + 6r = 0 \Rightarrow r = -1$$

Eingesetzt in die Geradengleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Spurpunkt hat die Koordinaten $S_3(7/0/0)$.

4.3

Winkelberechnung des Dreiecks SCA:

Der Winkel α sei der Winkel beim Punkt S:

$$\text{Es gilt } \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}}{|\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{SC}|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{16+9+36} \cdot \sqrt{16+9}} = \frac{16+9}{\sqrt{61} \cdot 5} \approx 0,64 \Rightarrow \alpha = 50,19^\circ$$

Der Winkel β sei der Winkel beim Punkt C:

$$\text{Es gilt } \cos \beta = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CS}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CS}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{16+9}} = \frac{0}{6 \cdot 5} = 0 \Rightarrow \beta = 90^\circ$$

Für den dritten Winkel γ beim Punkt A folgt: $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - 50,19^\circ = 39,81^\circ$

Fläche des Dreiecks:

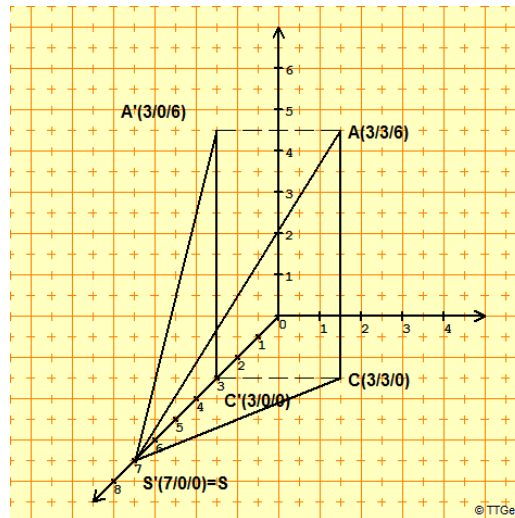
Da das Dreieck im Punkt C einen rechten Winkel besitzt, gilt für die Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{AC} \quad \text{mit } \overline{SC} = |\overrightarrow{SC}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16+9} = 5 \quad \text{und} \quad \overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36} = 6$$

$$\text{Daraus folgt } A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15 \text{ FE}$$

4.4

Die orthogonale Projektion der Punkte S, C und A auf die $x_1 - x_3$ -Ebene liefert die Punkte $S'(7/0/0) = S$ und $C'(3/0/0)$ und $A'(3/0/6)$ (setze jeweils die x_2 -Koordinate auf 0)



4.5

Bei dem Körper handelt es sich um eine Pyramide mit Spitze $S = S'$ und rechteckiger Grundfläche $C'CAA'$.

Für das Volumen der Pyramide gilt $V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Rechteck}} \cdot h_{\text{Pyramide}}$

$$A_{\text{Rechteck}} = \overline{C'C} \cdot \overline{AC} = 3 \cdot 6 = 18 \text{ und } h_{\text{Pyramide}} = \overline{C'S'} = 4$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 4 = 24 \text{ VE}$$

4.6

Die Gerade h besitzt die Gleichung $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor hat die Länge $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Dies bedeutet, wenn man für t die Zahlenwerte 1 oder -1 einsetzt, erhält man Punkte, die vom Punkt $A(3/3/6)$ einen Abstand von 5 besitzen.

Damit der Abstand 2,5 beträgt, muss für $t = 0,5$ oder $t = -0,5$ eingesetzt werden.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und damit lauten die Punkte $P(4,5/3/8)$ und $Q(1,5/3/4)$.